Die Masse als Trägheitsmaß

FRIEDRICH HERRMANN – MICHAEL POHLIG

Die Masse wird gewöhnlich eingeführt als Maß für die Trägheit eines Körpers. Aber was will man überhaupt unter Trägheit verstehen? Wir führen ein Maß für die Trägheit ein. Es stellt sich heraus, dass für hohe, relativistische Geschwindigkeiten weder die Ruhemasse, noch die relativistische Masse die Anforderungen an ein sinnvoll definiertes Trägheitsmaß erfüllt. Wie wollen wir aber im Physikunterricht über Trägheit sprechen? Wie kann man die Alltagssprache der Schüler/innen nutzen und trotzdem zu einer soliden Begriffsbildung gelangen? Auf diese Fragen versuchen wir eine Antwort zu geben.

1 *Einleitung*

Relativitätstheorie und Kosmologie haben Jahrzehnte lang im Unterricht der Schule (und auch der Hochschule) nur eine unbedeutende Rolle gespielt. Die Relativitätstheorie schien für alles, was die menschliche Erfahrung betrifft, nicht wichtig zu sein, und die Kosmologie erschien in der allgemeinen Wahrnehmung als ein recht spekulativer Bereich der Wissenschaft. Das hat sich in der letzten Zeit geändert. Die Relativitätstheorie muss neuerdings auch in technischen Anwendungen berücksichtigt werden. Und seitdem man die Gravitationswellen nachgewiesen und Schwarze Löcher direkt „gesehen" hat, ist das Ansehen der Kosmologie fast sprunghaft gestiegen. Sie scheint jetzt der Teilchenphysik den Rang abzulaufen.
Das wirkt sich auch auf die Schule aus. In Lehrplänen und Lehrbüchern nehmen Relativitätstheorie und Kosmologie einen breiteren Raum ein als früher. Damit entstehen für uns Lehrer/innen neue Fragen.

Es geht uns im Folgenden um ein Unterrichtsdetail: Wie sollen wir mit dem Begriff der Trägheit umgehen?
In der klassischen, d.h. vorrelativistischen Physik ist es Brauch, und zwar guter Brauch, die Masse einzuführen als Maß für zwei Eigenschaften, die zunächst nichts miteinander zu tun zu haben scheinen: für die Trägheit und für die Schwere eines Körpers oder Teilchens. Mit der Relativitätstheorie ändert sich etwas an dieser Interpretation. Zum einen zeigt sich, dass Trägheit und Schwere Manifestationen ein und derselben den Körper charakterisierenden Größe sind: Was sich in einem Bezugssystem als Schwere äußert, muss man im anderen als Trägheit interpretieren.
Unabhängig davon ergibt sich aber mit der Interpretation der Masse als Maß für Trägheit und Schwere noch ein anderes Problem – nämlich dann, wenn die Geschwindigkeit des betrachteten Körpers relativistisch hoch wird. Darum soll es im Folgenden gehen.

2 *Definition eines Trägheitsmaßes*

Zunächst eine Kleinigkeit: Im Unterricht und in Lehrbüchern spricht man oft von der Trägheit der Masse oder von der trägen Masse. Aber nicht die Masse ist träge. Wenn irgendetwas träge ist, so ist es ein Körper oder ein Teilchen. Die Masse ist nur ein Maß für diese Eigenschaft. Von der trägen Masse zu sprechen ist so, als würde man sagen „die kalte Temperatur" oder die „langsame Geschwindigkeit". Das versteht zwar jeder, aber schön ist es nicht. Besser wäre etwa die Bezeichnung „Trägheitsmasse" (im Unterschied zur „Gravitationsmasse").

Es geht uns im Folgenden um die Frage, ob die Masse ein Maß für die Trägheit ist. In der klassischen (nichtrelativistischen) Physik scheint darüber kein Zweifel zu bestehen. Schwieriger zu beantworten ist die Frage für die relativistische Physik. Deshalb ist es angebracht, dass wir zunächst erklären, was wir unter Trägheit verstehen wollen und was wir von einem Trägheitsmaß erwarten – egal auf was für Bewegungen wir es anwenden. Es soll eine physikalisch sinnvolle Definition sein. Sie soll aber, wenn möglich, auch das abdecken, was man mit den Worten der Alltagssprache der Schüler/innen im Zusammenhang mit einer Bewegung als Trägheit bezeichnen würde.

Wir definieren das Trägheitsmaß:

$$T := dp/dv \qquad (1)$$

Die Größe ist anschaulich. Sie sagt uns, ob man einem Körper viel oder wenig Impuls dp zuführen muss, damit sich seine Geschwindigkeit um dv ändert. Braucht man für eine gewünschte kleine Geschwindigkeitsänderung viel Impuls, so ist er träge; braucht man wenig, so ist er nicht träge, siehe auch den Kasten 1. Wir beschränken uns hier auf solche Impulsänderungen, deren Richtung dieselbe ist, wie die des Impulses, den der betrachtete Körper schon vor der Änderung hatte.

Wir hatten das Trägheitsmaß definiert als

$$T := dp/dv$$

Der Ausdruck sagt uns, wieviel Impuls man braucht, um die Geschwindigkeit zu ändern. Man kann die Frage auch so formulieren: Welche Kraft F braucht man, um eine gewünschte Beschleunigung a zu erhalten. Dann würde man schreiben

$$T := F/a\ .$$

Mit $F = dp/dt$ und $a = dv/dt$ folgt daraus unmittelbar

$$T := dp/dv\ .$$

Kasten 1. Zwei äquivalente Definitionen des Trägheitsmaßes

Wir können unsere Definition auch grafisch interpretieren. Wenn wir p über v auftragen, können wir die Trägheit an der Steigung des Funktionsgrafen ablesen.

Wir wollen die Definition zunächst auf ein spezielles System anwenden: einen Körper, der sich mit nichtrelativistischer Geschwindigkeit bewegt. In diesem Fall gilt:

$$p = m \cdot v \qquad (2)$$

Wir bekommen dann mit Gleichung:

$$T = dp/dv = m \qquad (1)$$

Unser Trägheitsmaß T ist also gleich der Masse – was uns nicht überrascht.
Den p-v-Zusammenhang zeigt Abbildung 1. Er ist linear, die Steigung dp/dv ist überall gleich.

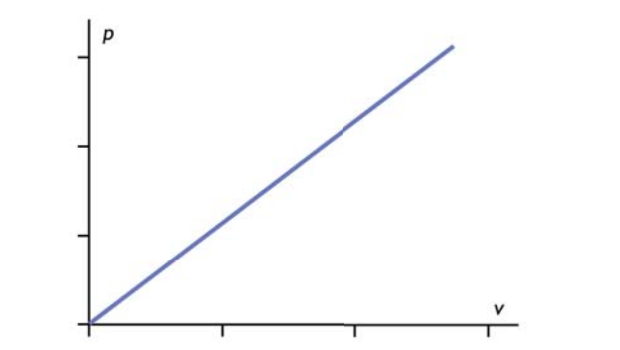

Abb. 1. Der Impuls ist proportional zur Geschwindigkeit; die Steigung der Funktion $p(v)$ ist überall gleich.

Zusammenfassung:
Wir definieren als Maß für die Trägheit $T := dp/dv$

3 Was sich bei hohen Geschwindigkeiten ändert

Bei hohen Geschwindigkeiten ist die Masse in Gleichung (2) geschwindigkeitsabhängig und es gilt

$$p = m(v) \cdot v \qquad (3)$$

mit

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

Hier ist c die Grenzgeschwindigkeit (oder Lichtgeschwindigkeit). Oft wird $m(v)$ relativistische Masse genannt. m_0 ist die Masse des Körpers, wenn er ruht, seine Ruhemasse. Gleichung (3) kann man dann so schreiben:

$$p(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \qquad (5)$$

Abbildung 2 zeigt den Impuls als Funktion der Geschwindigkeit für drei verschiedene Werte der Ruhemasse m_0.

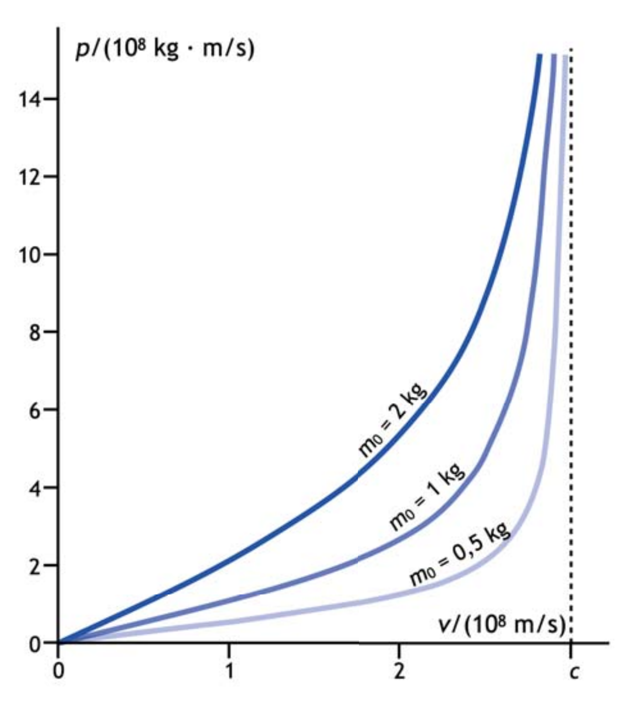

Abb. 2. Für kleine Werte der Geschwindigkeit nimmt der Impuls nahezu linear mit der Geschwindigkeit zu.
Mit zunehmender Geschwindigkeit wächst der Impuls immer stärker. Bei der Grenzgeschwindigkeit c divergiert die Kurve.

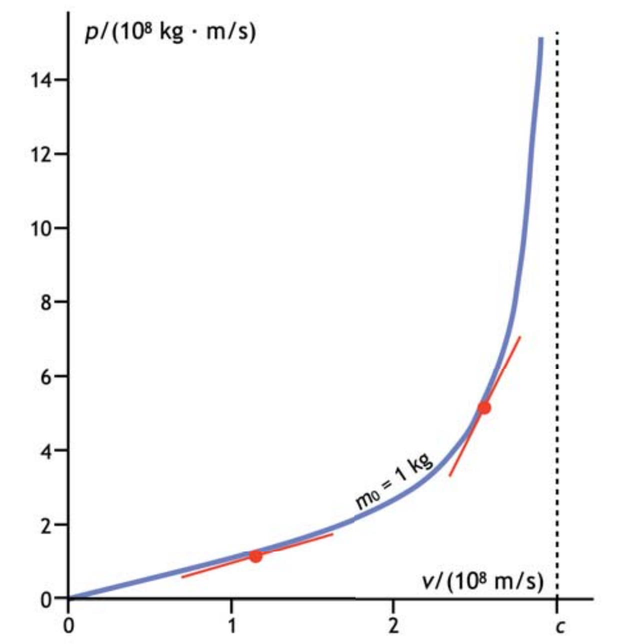

Abb. 3. Die Steigung der Tangente sagt uns, wie träge der Körper ist: je größer die Steigung, desto größer die Trägheit. Während der Körper mit Impuls geladen wird, nimmt seine Trägheit zu.

Die Steigung der Kurven, und damit die Trägheit T der betrachteten Körper, ist jetzt nicht mehr konstant; sie hängt von der Geschwindigkeit ab (Abb. 3). Sie beginnt mit einem kleinen Wert, nämlich dem der klassischen Bewegung und wird dann immer größer. Es wird immer schwerer, den Körper zu beschleunigen; man braucht immer mehr Impuls *dp*, um die Geschwindigkeit des Körpers um *dv* zu erhöhen. Die Geschwindigkeit *c* stellt eine unüberschreitbare Grenze dar. Darum nennt man sie Grenzgeschwindigkeit.

Die Schüler/innen lernen also, dass die Trägheit nicht eine Eigenschaft eines Körpers ist, die nur durch einen einzigen Zahlenwert gegeben ist; sie hängt nicht nur von der Ruhemasse ab (die den Körper charakterisiert), sondern auch noch von der Geschwindigkeit (die den Bewegungszustand des Körpers charakterisiert).

Abbildung 4 zeigt, dass Körper unterschiedlicher Ruhemasse dieselbe Trägheit haben können.

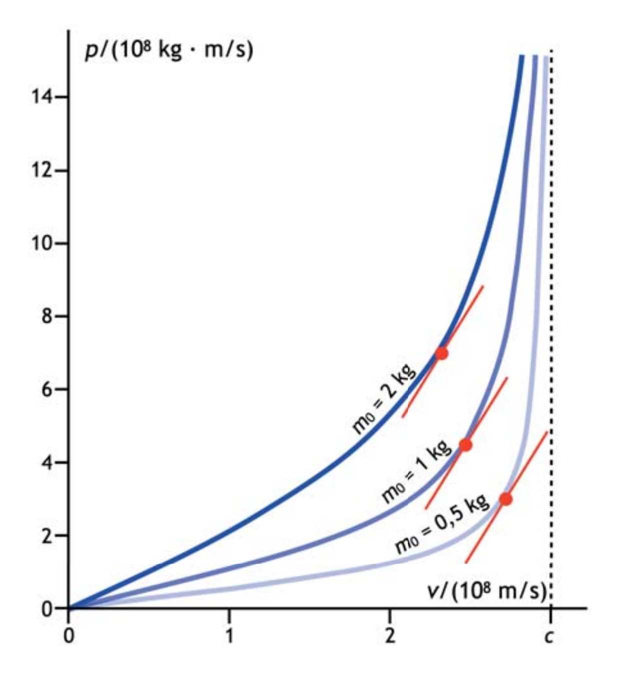

Abb. 4. Die drei Tangenten haben in den durch rote Punkte markierten Zuständen dieselbe Steigung, d.h. drei Körper in diesen Zuständen haben trotz unterschiedlicher Ruhemassen dieselbe Trägheit.

Wir berechnen nun unser neues Trägheitsmaß

$$T(v) = \frac{dp}{dv} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{6}$$

Unter Verwendung von Gleichung (4) erhalten wir

$$T(v) = \frac{dp}{dv} = \frac{m}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{7}$$

Das Ergebnis ist enttäuschend. Gleichung (6) sagt uns, dass *T* nicht gleich der Ruhemasse m_0 ist, Gleichung (7) sagt, dass es nicht gleich der relativistischen Masse *m* ist. Siehe auch Kasten 2.

Hier noch eine Komplikation, die wir aber nicht in den Unterricht tragen würden. Wir hatten gesehen: Ein Körper wird umso träger, je schneller er sich bewegt, siehe Gleichung (6). Was eine Beschleunigung quer zu dieser Richtung betrifft, sieht es anders aus. Der Körper bewegt sich ja in der Querrichtung zunächst gar nicht. Daher ist hier die Trägheit geringer als in Längsrichtung. Man kann also eine Längs- und eine Querträgheit unterscheiden. Die Längsträgheit ist durch unsere Gleichung (6) gegeben:

$$T_l(v) = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Für die Querträgheit gilt:

$$T_t(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Manchmal werden diese Ausdrücke auch die longitudinale und die transversale Masse genannt (Einstein, 1905, 919; Born, 1969, 238; Sommerfeld, 1944, 31).

Kasten 2. Longitudinale und transversale Masse

Zusammenfassung: Bei hohen Geschwindigkeiten ist weder die Ruhemasse, noch die relativistische Masse ein Maß für die Trägheit.

4 Die Masse als Trägheitsmaß oder nicht?

Folgt daraus, dass wir im Unterricht auf eine Aussage wie „Die Masse ist ein Maß für die Trägheit“ verzichten müssen? Wir meinen, dass man nicht so weit gehen muss. Die Fälle, in denen die Interpretation der Masse als Maß für die Trägheit gerechtfertigt ist, sind so häufig und allgegenwärtig, dass das Opfer, das man bringen würde, zu groß wäre.
Es kommt hinzu, dass die Interpretation der Masse als Trägheitsmaß sogar im Rahmen der relativistischen Physik noch ihre Berechtigung hat. Wie kann das sein? Hatten wir nicht gerade das Gegenteil bewiesen?

Bei unseren bisherigen Betrachtungen waren wir, ohne es ausdrücklich zu sagen, von strukturlosen Teilchen oder Körpern ausgegangen, also Systemen, die man auf keine Art anregen konnte, deren Temperatur oder Druck man nicht ändern konnte, etc.. Von dieser Einschränkung wollen wir jetzt absehen.
Wir machen ein Gedankenexperiment. In einen Behälter befindet sich ein Gas, dessen Temperatur so hoch ist, dass seine Teilchen relativistische Geschwindigkeiten haben. Mit diesem Behälter machen wir nun klassische Experimente, d.h. Experimente, bei denen die Geschwindigkeit des Behälters im klassischen Bereich bleibt.
Zunächst stellen wir das Gas auf eine Waage. Wir stellen fest, dass die Masse (die Gravitationsmasse) größer ist, als die Summe der Ruhemassen der Teile, und dass sie auch von der Temperatur abhängt.

Außerdem machen wir ein Beschleunigungsexperiment. Wir beschleunigen das Gas aber so, dass seine (Schwerpunkts-) Geschwindigkeit immer viel kleiner als c bleibt. Dabei stellen wir fest, dass die Trägheit gleich der Masse ist, die wir mit der Waage bestimmt haben, und dass sie unabhängig von der Schwerpunktsgeschwindigkeit ist. Die gemessene Masse ist also ein Maß für die Trägheit, obwohl sich die Teilchen des Gases relativistisch bewegen, und obwohl es vielleicht Photonen waren, die gar keine Ruhemasse haben.

Zusammenfassung: Die Masse taugt als Trägheitsmaß solange die Schwerpunktsgeschwindigkeit klein gegen die Grenzgeschwindigkeit ist – egal wie hoch die Geschwindigkeiten der Bestandteile des Systems sind, und egal ob es Teilchen mit oder ohne Ruhemasse sind.

5 Welche Größe verdient den schlichten Namen Masse?

Wir wollen uns noch einer nicht rein physikalischen Frage zuwenden. Es geht um die Namen von m und m_0. Wir hatten sie bisher, um keine Missverständnisse aufkommen zu lassen, relativistische Masse und Ruhemasse genannt. Nun ist das unnötig umständlich. Denn es gibt ja das schöne, kurze Wort Masse. Was soll man also unter Masse verstehen?
Dazu gibt es zwei Auffassungen oder Gewohnheiten, Tabelle 1.

	m	m_0
1	relativistische Masse	Masse
2	Masse	Ruhemasse

Tab. 1. Zum Gebrauch der Bezeichnung Masse

Es geht bei der Entscheidung für die eine oder die andere Sprechweise nicht um richtig oder falsch, sondern nur darum, in welchem Kontext, die Sprechweise Vorteile hat. Beide Auffassungen können vertreten werden, indem man sich auf Vorbilder beruft, die über jeden Verdacht erhaben sind, das Thema nicht zu kennen. So entscheidet sich etwa Hermann Weyl (1923, 199) für 1, Arnold Sommerfeld (1964, 249) für 2. Inzwischen hat sich aus der Frage eine Kontroverse entwickelt (Okum, 1989 und Oas, 2008), die vielleicht manchmal etwas zu vehement geführt wird, und uns Lehrer/innen etwas ratlos macht.

Wir wollen die Argumente beider Seiten kurz zusammenfassen. Aber zunächst noch eine Vorbemerkung. Wenn wir im Folgenden von der Masse von etwas sprechen, denken wir dabei immer an die Masse eines real existierenden Gebildes: Ein Atom, das auch angeregt sein kann, ein Molekül, das zu Rotationen und Schwingungen angeregt ist, einen Festkörper mit vielen inneren Freiheitsgraden, ein molekulares Gas, ein elektrostatisches oder magnetostatisches Feld, thermische Strahlung, und anderes mehr. Das heißt, wir sprechen von konkreten Gebilden und nicht, wie man es vielleicht im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie, vor allem aber in der Teilchenphysik gewohnt ist, von punktförmigen Teilchen, die ja nur eine mathematische Abstraktion darstellen. Auch unsere Schüler/innen werden bei der Masse eher an eine Größe denken, die einem Objekt der realen Erfahrungswelt zukommt.
Wenn wir uns auf m_0 beziehen, genügt es daher nicht zu sagen, das sei die Masse, die das Gebilde hat wenn es ruht. Bei einem realen Gebilde, also etwa einem echten Festkörper mit allen seinen inneren Wackeleien und sonstigen Anregungen, ist es die Masse des Körpers in seinem Schwerpunktsystem, denn innere Ruhe ist nicht vorausgesetzt.
Vergleichen wir nun die beiden „Gewohnheiten".

1. Man nennt m_0 die Masse und m die relativistische Masse
Die Sprechweise ist weit verbreitet. Vor allem in der Teilchenphysik ist sie gang und gäbe. Die Begründung für diese Wahl lautet etwa so: Man interessiert sich für physikalische Größen, die für ein Teilchen charakteristische Werte haben und die invariant bei Bezugssystemwechsel sind. Dazu gehören die elektrische Ladung (z. B. e), der Drehimpuls (z.B. $\hbar$), die Baryonen- und die Leptonenzahl (z.B. 0 oder 1), und andere. Nun hat auch m_0 diese Eigenschaft. Weil m_0 für ein Teilchen einen charakteristischen Wert hat, wird man argumentieren, verdient es einen einfachen Namen, und man nennt es Masse. So kann man sagen: Die Masse des Elektrons beträgt $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Man braucht kein Bezugssystem zu nennen, denn „Masse" bezieht sich immer auf das Bezugssystem, in dem das Teilchen (oder, falls es eine innere Struktur hat, sein Schwerpunkt) ruht. Photonen, und damit auch jegliches elektromagnetische Feld, sind entsprechend „masselos".
Die Größe m (Gleichung (4)), die als Faktor in Gleichung (5) auftritt, braucht dann einen anderen Namen. Man nennt sie aus naheliegenden Gründen „relativistische Masse".
Ein sprachliches Problem tritt auf, wenn man etwa das folgende Experiment beschreiben möchte:
Zwei gleichartige und gleich aussehende Behälter führen auf einer Waage zum selben Ausschlag, d.h. sie haben dieselbe Masse. In dem einen Behälter befindet sich ein kleiner Festkörper, in dem anderen elektromagnetische Strahlung. In dem einen befindet sich also etwas, dessen Masse von null verschieden ist, in dem anderen etwas, das „masselos" ist. Die Waage, d.h. ein anerkanntes Messgerät der Masse, misst also eine Masse, wo keine ist.
Gewiss kann man diese Diskrepanz durch zusätzliche Erklärungen abmildern: Es gelte ja die Äquivalenz von Masse und Energie, und die Waage könne deshalb nicht wissen, ob es sich um Masse oder Energie handelt.

2. Man nennt m die Masse und m_0 die Ruhemasse
Diese Sprechweise ist in der Schulphysik fast durchweg üblich (und auch wir würden uns ihr anschließen.)
Die Begründung für diese Wahl kann so lauten: Wir kennen die Äquivalenz von Masse und Energie. Ihr zufolge gilt:

$$E = m \cdot c^2 \tag{8}$$
und
$$E_0 = m_0 \cdot c^2 \tag{9}$$

Hier ist E die Energie, und E_0 die Ruhenergie, d.h. die Energie im Schwerpunktsystem. Entsprechend bezeichnen wir m als die Masse und m_0 als Ruhemasse.

Die Gleichungen (8) und (9) sagen dann nichts anderes, als dass es sich bei Masse und Energie um ein und dieselbe physikalische Größe handelt.

Zusammenfassung: Die Bezeichnung Masse wird nicht einheitlich verwendet. Man versteht darunter entweder die Ruhemasse oder die relativistische Masse.

6 Schlussbemerkungen

Es ging uns um die Frage, ob die Masse ein Maß für die Eigenschaft Trägheit ist.
Dazu haben wir zunächst geklärt, was wir unter Trägheit verstehen wollen, und wir haben ein Maß dafür eingeführt.
Solange sich der Schwerpunkt eines Objekts (eines Körpers, eines Gases, eines Moleküls oder sonstigen Teilchens) mit einer Geschwindigkeit bewegt, die viel kleiner als die Grenzgeschwindigkeit c ist, misst die Masse die Trägheit – und zwar auch dann, wenn sich die Teile des Objekts mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen.
Wenn man aber relativistische (Schwerpunkts-)Geschwindigkeiten zulässt, verliert die Masse diese Eigenschaft. Weder die Ruhemasse, noch die so genannte relativistische Masse, ist dann ein Maß für die Trägheit.
Im Unterricht wollen wir an der Interpretation der Masse als Trägheitsmaß festhalten, solange wir Bewegungen betrachten, bei denen die Schwerpunkts-Geschwindigkeit klein gegen c ist.

Literatur

BORN, M. (1969). *Die Relativitätstheorie Einsteins*. 5. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer.

EINSTEIN, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik, 322*(10), 891–921.

OAS, GARY (2008). On the abuse and use of relativistic mass. arXiv:physics/0504110 [physics.ed-ph]

OKUN, LEV B. (1989). The concept of mass. *Physics Today, 42*(6), 31–36.

SOMMERFELD, A. (1944). *Vorlesungen über Theoretische Physik, Mechanik*: Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.

SOMMERFELD, A. (1964). *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band III, Elektrodynamik*: Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.

WEYL, H. (1970). *Raum-Zeit-Materie*. Sechste Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Prof. Dr. FRIEDRICH HERRMANN, f.herrmann@kit.edu, ist jetzt im Ruhestand. Er hat am KIT Student/innen der Physik und des Lehramts Physik ausgebildet und war gleichzeitig Physiklehrer am Europagymnasium in Wörth am Rhein.

StD a.D. MICHAEL POHLIG, pohlig@kit.edu, war Abteilungsleiter am Wilhelm-Hausenstein-Gymnasium in Durmersheim. Seit 2007 hat er am KIT einen Lehrauftrag im Bereich „Didaktik der Physik".