Die Stabilität der Sterne

von Friedrich Herrmann und Holger Hauptmann

Einleitung

Die Entwicklung des Lebens auf der Erde war möglich, dank der gleichmäßigen Einstrahlung von der Sonne über einen Zeitraum von mehreren Milliarden Jahren. Dieses Verhalten ist aus physikalischer Sicht keineswegs selbstverständlich. Der gesamte nukleare Brennstoff, d. h. der Wasserstoff, ist von Anfang an in der Sonne gespeichert, und vergleicht man die Reaktion in der Sonne mit einer irdischen Verbrennung, entspricht sie einem Ofen, in dem Brennstoff und Sauerstoff für die gesamte Lebensdauer gespeichert ist – eine ziemlich explosive Mischung!

Man könnte die Sonne auch mit einem irdischen Kernreaktor vergleichen. Auch dort wird der „Brennstoff" für mehrere Jahre im Reaktor gespeichert. Allerdings ist der Kernreaktor mit Steuerstäben ausgerüstet, die als Teil einer aktiven Rückkopplung für eine konstante Reaktionsumsatzrate sorgen.

Wer sorgt aber dafür, dass die Reaktionen in der Sonne so gleichmäßig ablaufen? Welcher Rückkopplungsmechanismus hindert die Sonne daran, wie eine gigantische Wasserstoffbombe zu explodieren? Die Erklärung hängt mit einer Eigenschaft der Sterne zusammen, die oft als „negative spezifische Wärme" bezeichnet wird. Was hat man darunter zu verstehen? Führt man einem System Wärme, d. h. Energie und Entropie, zu, so nimmt seine Temperatur unter normalen Umständen dabei zu. Ein System mit negativer spezifischer Wärme verhält sich genau umgekehrt: Bei Wärmezufuhr nimmt seine Temperatur ab.

Wir möchten zunächst mit der Sonne ein paar *Gedankenexperimente* durchführen, um deutlicher zu machen, worin diese Eigenschaft genau besteht.

Wir stellen uns zunächst vor, die Wärmequelle in der Sonne sei nicht eine Fusionsreaktion, sondern ein großer Tauchsieder. Wir sind damit in der Lage, die Wärmezufuhr beliebig ein- und ausschalten zu können. Ebenso wollen wir die Wärmeabgabe, die ja normalerweise durch die Strahlung erfolgt, nach Belieben ein- und ausschalten können. Dazu platzieren wir um die Sonne herum einen großen sphärischen Spiegel, den wir auch wieder wegnehmen können, Bild 1. Mit Hilfe von Tauchsieder und Spiegel können wir also die Wärmezufuhr und die Wärmeabgabe beliebig regeln, und wir können so die innere Energie der Sonne willkürlich einstellen.

Wir beginnen nun mit dem Experiment. Der Spiegel sei zunächst in seiner Position, der Tauchsieder ausgeschaltet. Die Sonne hat eine bestimmte Temperatur und eine bestimmte Größe. Wir schalten jetzt die Heizung für ein bestimmtes Zeitintervall ein, d. h. wir führen der Sonne Wärme zu. Man beobachtet, dass die Temperatur abnimmt, und die Sonne dabei gleichzeitig größer wird. Danach nehmen wir den Spiegel für ein bestimmtes Zeitintervall weg, d. h. wir lassen die Sonne Wärme abgeben. Wir beobachten, dass die Temperatur der Sonne zunimmt und das Volumen abnimmt, die Sonne wird kleiner.

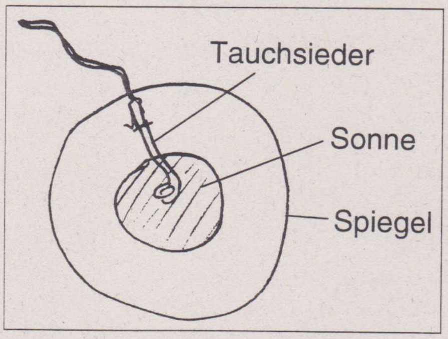

***Bild 1:** Gedankenexperimente mit der Sonne, Wärmezufuhr und -abgabe können mit Hilfe des Tauchsieders bzw. des Spiegels ein- und ausgeschaltet werden.*

Wenn sich die Sonne tatsächlich so verhält, kann man ihre Stabilität leicht verstehen: Wie bei jeder chemischen Reaktion, so nimmt auch die Umsatzrate jeder Kernreaktion mit der Temperatur zu. Wenn nun die Energieproduktionsrate, und damit die Wärmezufuhr, aus irgendeinem Grunde, durch irgendeine Störung, einen zu großen Wert annimmt, wird die Temperatur aufgrund der negativen spezifischen Wärme abnehmen. Die Folge ist, dass die Energieproduktionsrate wieder kleiner wird, die Störung wird korrigiert. Wird die Wärmeproduktion in die andere Richtung gestört, d. h. sinkt sie unter den „Sollwert", so nimmt die Temperatur zu und als Folge auch die Energieproduktionsrate. Die Wärmeproduktion wird also wieder in Richtung Sollwert korrigiert.

Dies war eine Beschreibung des Verhaltens der Sonne, erklärt aber noch nicht die Ursache dieser ungewöhnlichen Eigenschaften. *Wie kommt die negative spezifische Wärme der Sonne zustande?* Betrachtet man typische Lehrbücher zur Astrophysik, erhält man den Eindruck, dass dies nicht einfach zu verstehen ist. Um die Sterne zu beschreiben, werden mehrere Variablen ausgewählt: *Temperatur, Druck, Dichte, Energieproduktionsrate, Leuchtkraft* (d. h. Energiestromdichte), *Opazität und Masse*. Um diese Variablen miteinander zu verknüpfen, werden die folgenden Gesetze verwendet: Das *allgemeine Gasgesetz*, das *Gravitationsgesetz*, die *Erhaltungssätze für Masse und Energie*, das *Stefan-Boltzmann Gesetz* und die *hydrostatische Gleichgewichtsbedingung*. Zusätzlich werden einige Näherungen benötigt und anpassbare Parameter eingeführt. Lässt man darauf nun die Mathematik los, erhält man als Ergebnis eine vollständige Beschreibung der mechanischen und thermodynamischen Eigenschaften der Sterne.

Nach diesen Berechnungen scheint die Stabilität der Sterne das Ergebnis des komplizierten Zusammenspiels der vielen Variablen des Systems zu sein und mit der speziellen Werteverteilung der Größen innerhalb des Sterns zusammenzuhängen. Wenn numerische Ergebnisse oder zumindest Größenordnungen inter-

Die nukleare Fusionsreaktion in Sternen ist stabil aufgrund der negativen spezifischen Wärme des Systems. Beim Blick in die Fachliteratur erhält man den Eindruck, dieses Phänomen sei ein Ergebnis des komplizierten Zusammenspiels zwischen den untersuchten physikalischen Größen, die als Feldgrößen über ein Differentialgleichungs system zusammenhängen. Wir stellen ein einfaches Modellsystem vor, das ohne Differentialgleichungen behandelt werden kann.

essieren, kommt man um solche Berechnungen natürlich nicht herum. Will man aber die zugrundeliegende Physik verstehen, scheint dies nicht der günstigste Weg zu sein. Um ein Phänomen physikalisch zu verstehen, ist es häufig am besten, die einfachsten Bedingungen zu betrachten unter denen es auftritt. So lernt man nicht nur, wovon es abhängt, sondern ebenso – was genauso wichtig ist – wovon es nicht abhängt.
Wir haben uns daher gefragt, ob man *die negative spezifische Wärme der Sonne nicht auch ohne die Betrachtung von Feldgrößen verstehen kann? Kann man dasselbe Verhalten auch an einem homogenen System beobachten, ohne ein Differentialgleichungssystem lösen zu müssen?* Die Antwort ist „ja", man kann dieses Verhalten der Sterne anhand eines einfachen Modells verstehen, das wir im folgenden Abschnitt vorstellen wollen.

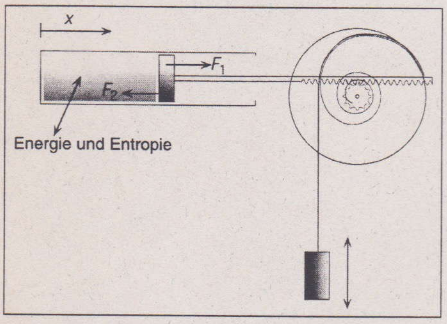

Bild 2: Ein Sternmodell. Die Gleichgewichtsposition des Kolbens ist vom Energieinhalt des Gases abhängig. Wird dem Gas Energie (und Entropie) zugeführt, bewegt sich der Kolben nach rechts, d. h. das Volumen nimmt zu, und die Temperatur des Gases nimmt ab.

Ein Sternmodell

Beschreibung des Modells

Bild 2 zeigt unser Sternmodell. Es ist allerdings ein Modell, mit dem wir nur in Gedanken experimentieren. Die praktische Realisierung würde an der Reibung und der schlechten Wärmeisolation scheitern.
Wie funktioniert dieses Modell? Während das Gas eines echten Sterns durch die Gravitation zusammengehalten wird, wird das Gas unseres Modellsterns durch den Zylinder mit dem Kolben zusammengehalten. Wir nehmen an, wir könnten den Wärmefluss, d. h. den Fluss von Energie und Entropie, in das Gas und aus dem Gas steuern. Wird das Gas geheizt, ist der zugeführte Energiestrom P mit dem zugeführten Entropiestrom I_S durch die Gleichung $P = T \cdot I_S$ verknüpft. Solange dem Gas Energie in Form von Wärme zugeführt wird, verlässt ein anderer Energiebetrag das Gas über den Kolben. Die zugeführte Entropie bleibt dagegen im Gas gespeichert.
Auf den Kolben wirken zwei Kräfte, die Kraft $F_1(x)$ vom Gas und die Kraft $F_2(x)$ durch das Gewicht und die Kolbenstange. Indem man der Rille, auf der die Schnur mit dem Gewicht läuft, eine geeignete Form gibt, kann man den Zusammenhang zwischen der Kraft $F_2(x)$ und der Position x des Kolbens beliebig wählen. Wir formen die Rille so, dass für das Kraftgesetz von $F_2(x)$ gilt:

$$F_2(x) = \frac{C_2}{x^\alpha}.$$

Hierbei soll C_2 eine positive Konstante und $1 < \alpha < \gamma$ sein; γ ist der Adiabatenkoeffizient des Gases.

Das mechanische Gleichgewicht des Systems

Wir beginnen mit einer Untersuchung der mechanischen Stabilität des Systems. Daher verhindern wir zunächst jeden Wärmeaustausch des Gases mit der Umgebung. Die Entropie des Gases ist daher konstant und der p-V-Zusammenhang des Gases ist: $p \cdot V^\gamma = \text{const.}$ Da $F_1 \propto p$ und $V \propto x$ ist, erhalten wir das Kraftgesetz des Gases:

$F_1(x) = \frac{C_1}{x^\gamma}$, mit einer positiven Konstante C_1, die vom Entropieinhalt des Gases abhängt.
Die mechanische Gleichgewichtsbedingung für unser System ist:

$$F(x_0) = F_1(x_0) + F_2(x_0) = \frac{C_1}{x_0^\gamma} - \frac{C_2}{x_0^\alpha} = 0. \quad (1)$$

Sie kann erfüllt werden für alle Werte von C_1, C_2, α und γ.
Um zu sehen, dass es sich um ein stabiles Gleichgewicht handelt, berechnen wir die Ableitung von $F(x)$ an der Stelle $x = x_0$:

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x_0} = -\gamma \frac{C_1}{x_0^{\gamma-1}} + \alpha \frac{C_2}{x_0^{\alpha-1}} = (-\gamma + \alpha) \frac{C_1}{x_0^{\gamma-1}}.$$

Im zweiten Schritt wurde die Gleichgewichtsbedingung (1) verwendet. Da $\alpha < \gamma$ ist, folgt $\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x_0} < 0$, d. h. für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtsposition kehrt das System zu x_0 zurück.

Systemverhalten bei Wärmeaustausch

Wird dem Gas Wärme zugeführt oder entzogen, bewegt sich der Kolben, bleibt aber immer im mechanischen Gleichgewichtszustand. Wir wollen den p-V-Zusammenhang des Gases für diese Gleichgewichtszustände bestimmen. Mit $F_1(x) = -F_2(x)$ erhält man $F_1(x) = C_2/x^\alpha$.
Unter Beachtung von $F_1 \propto p$ und $V \propto x$ folgt: $p(V) = \frac{C}{V^\alpha}$, mit einer Konstanten C. Im p-V-Diagramm erhält man eine Hyperbel, deren Exponent α zwischen 1 und γ liegt, also zwischen dem einer Isotherme und einer Isentrope.

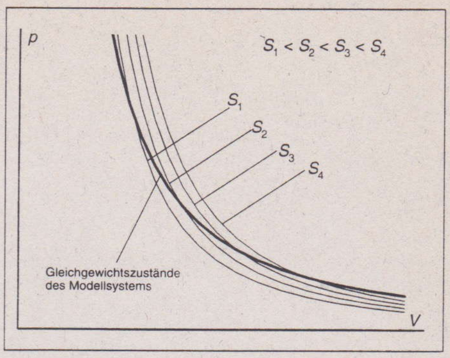

Bild 3: Die fett gedruckte Kurve zeigt die stabilen Gleichgewichtszustände des Modellsystems. Verfolgt man die Kurve in Richtung steigenden Volumens, trifft man auf Isentropen mit wachsender Entropie.

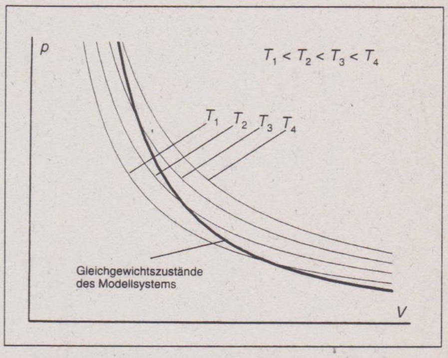

Bild 4: Die fett gedruckte Kurve zeigt die stabilen Gleichgewichtszustände des Modellsystems. Folgt man dieser Kurve von kleinen zu großen Volumina, schneidet man Isothermen mit sinkender Temperatur.

Wir erinnern noch einmal daran, dass diese Kurve Gleichgewichtszustände des Systems beschreibt, die sich durch unterschiedliche Entropieinhalte des Gases unterscheiden. Wird dem Gas Wärme zugeführt oder entzogen, durchläuft das Gas diese Zustände. In den Bildern 3 und 4 sind diese Zustände als fett gedruckte Kurve eingezeichnet.
Bild 3 zeigt sie zusammen mit einigen Isentropen. Man sieht, dass man beim Durchlaufen der p-V-Kurve unseres Modells in Richtung größeren Volumens auf Isentropen trifft, die zu immer größerem Entropieinhalt gehören. Da die Entropiezufuhr an die Wärmezufuhr gekoppelt ist, kann man schlussfolgern: Bei Wärmezufuhr nimmt das Volumen des Gases zu.
Bild 4 zeigt die p-V-Kurve des Gases mit einer Reihe von Isothermen. Auf dem Weg von kleinerem zu größerem Volumen schneiden wir hier Isothermen von abnehmender Temperatur. Anders ausgedrückt: Bei Wärmezufuhr nimmt die Temperatur des Gases ab.
Wählt man den Exponenten α zwischen 1 und γ, verhält sich unser Modellsystem daher wie ein Stern, es hat eine negative spezifische Wärme. Während bei der Diskussion des mechanischen Gleichgewichts bereits klar wurde, warum $\alpha < \gamma$ sein muss, wird nun auch der Grund für die Bedingung $\alpha > 1$ klar. Für $\alpha < 1$ ist die spezifische Wärme des Systems positiv,

und für $\alpha = 1$ erhält man gerade den Grenzfall eines Systems, dessen Temperatur vom Entropieinhalt unabhängig ist. Unser Modellsystem ist vollständig reversibel, während in einem Stern viele irreversible Prozesse ablaufen, insbesondere die Fusionsreaktion selbst und der Wärmetransport von der Reaktionszone zur Oberfläche. Das Modell zeigt aber, dass diese Irreversibilitäten keinen Einfluss auf die Sternstabilität haben.
Im folgenden Abschnitt wollen wir die Energie- und Entropiebilanzen des Modells untersuchen und mit denen der Sterne vergleichen.

Energie- und Entropiebilanzen

Die Energiebilanz

Unser System besteht aus zwei aneinandergekoppelten Teilsystemen, die beide Energie speichern können:
1. Das Gas. Seine Energie wird innere Energie genannt.
2. Das System aus Gewicht und Kolbenstange auf der rechten Seite.

Wird dem Gas Energie in Form von Wärme zugeführt, können wir nicht schließen, dass diese Energie im Gas verbleibt, da das Teilsystem „Gas" mit dem Teilsystem „Gewicht und Kolbenstange" Energie austauschen kann. Tatsächlich haben wir im letzten Abschnitt gesehen, dass dabei die Temperatur des Gases geringer wird, und da bei einem idealen Gas die innere Energie nur von der Temperatur abhängt, bewirkt die Zuführung von Wärme eine Abnahme der inneren Energie des Gases. Anders ausgedrückt: Obwohl wir dem Gas Energie zuführen, wird sein Energieinhalt geringer. Auch wenn dies seltsam klingen mag, ist es dennoch nicht paradox. Denn das Gas ist ja mit dem zweiten Teilsystem verbunden, und wir schließen also, dass bei der Übergabe eines bestimmten Energiebetrages an das Gas, mehr als dieser Betrag an das Gewicht-und-Kolbenstange-Teilsystem weitergereicht wird.
Ein ganz ähnlicher Prozess läuft auch in einem Stern ab. Ein Stern kann ebenfalls in zwei Teilsysteme zerlegt werden; eines ist die Sternmaterie bzw. das „Gas", das andere das Gravitationsfeld. Wenn wir uns vorstellen, wir könnten die Energiezufuhr durch die Fusionsreaktion steuern und den Energieverlust durch Strahlung verhindern, zeigt uns das Ergebnis unseres Gedankenexperiments im ersten Abschnitt bereits, was mit der zugeführten Energie passiert.
Die Fusionsenergie wird zunächst dem Gas zugeführt und man könnte nun erwarten, dass seine Temperatur steigt. Statt dessen geschieht aber etwas anderes. Wird dem Gas eines Sterns eine bestimmte Menge Energie zugeführt, so wird gleichzeitig ein größerer Energiebetrag an das Gravitationsfeld weitergegeben und der Stern expandiert. Tatsächlich ist der an das Gravitationsfeld weitergegebene Energieanteil gerade doppelt so groß, wie der ursprünglich dem Gas zugeführte, wie mit dem Virial-Theorem gezeigt werden kann.

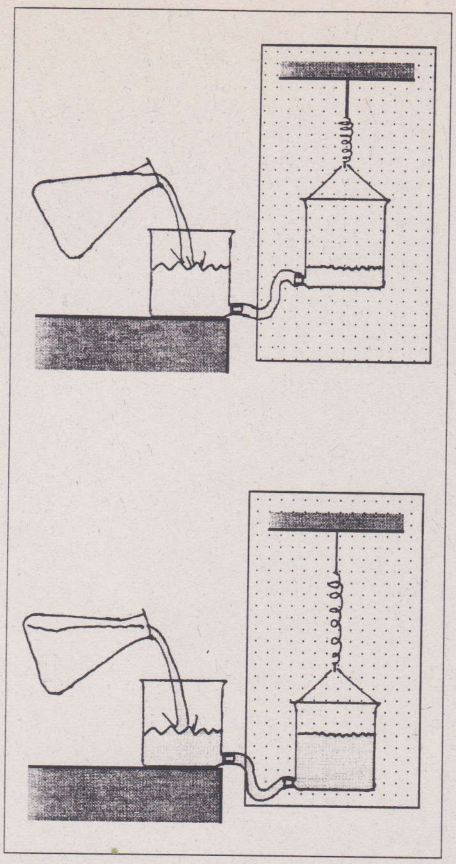

Bild 5: Füllt man Wasser in den linken Behälter, so sinkt der Wasserstand.

Wir sind daran gewöhnt zu beobachten, dass der Betrag einer Erhaltungsgröße zunimmt, wenn wir einem System etwas von dieser Größe hinzufügen. Um unseren Schülern den Gedanken plausibel zu machen, dass dies nicht zwangsläufig der Fall sein muss, zeigen wir ihnen ein hübsches Experiment, Bild 5. Zwei Wasserbehälter sind durch einen flexiblen Schlauch miteinander verbunden. Der rechte hängt an einer Feder und ist durch einen Karton verdeckt. Lässt man nun in den linken Behälter zusätzliches Wasser hineinlaufen, kann man beobachten, dass der Wasserstand abnimmt. Anschließend nehmen wir den Karton weg und diskutieren die Funktionsweise der Anordnung. Damit dieses Experiment gelingt, muss, wie man sich leicht überlegen kann, für die Federkonstante D die folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$\frac{1}{2} A \cdot \rho \cdot g < D < A \cdot \rho \cdot g,$$

wobei A die Querschnittsfläche der Wasserbehälter, ρ die Dichte des Wassers und g die Erdbeschleunigung ist. Die Ungleichung ist analog zur Bedingung $1 < \alpha < \gamma$ für unser Sternmodell; der zweite Teil bewirkt, dass der Wasserstand bei Zugabe von Wasser sinkt, während der erste Teil verhindert, dass die ganze Flüssigkeit in den rechten Eimer abläuft.

Die Entropiebilanz

Die Entropiebilanz ist einfacher als die Energiebilanz, da wir hier nur eines der beiden Teilsysteme betrachten müssen. Weder das Gewicht-und-Kolbenstange-System in unserem Modell, noch das Gravitationsfeld in echten Sternen kann Entropie speichern.
Wenn wir die Entrophiebilanz des Gases diskutieren, müssen wir beachten, dass der Entropieinhalt von zwei Variablen abhängt: dem Volumen und der Temperatur des Gases. Je größer das Volumen und je höher die Temperatur des Gases sind, desto mehr Entropie enthält es. (Beide Abhängigkeiten sind logarithmisch und mit Hilfe der statistischen Physik leicht einzusehen: Die Zunahme von Temperatur und Volumen entspricht jeweils einer Vergrößerung im Phasenraum.) Wir müssen daher bei der Untersuchung der Entropiebilanz des Gases beide Faktoren berücksichtigen. Im vorangegangen Abschnitt haben wir gesehen, dass bei der Wärmezufuhr:
– das Volumen des Gases zunimmt,
– die Temperatur des Gases abnimmt.
Unter „normalen Bedingungen", d. h. wenn das Volumen konstant gehalten wird, führt eine Entropieerhöhung zu einer Zunahme der Temperatur. Dass die Temperatur trotzdem abnimmt zeigt, dass die Volumenzunahme groß genug ist, den Einfluss der Entropieerhöhung auf die Temperatur mehr als zu kompensieren. Dies gilt sowohl für das Gas in unserem Modell, als auch in einem Stern.
In beiden Fällen wird dies dadurch ermöglicht, dass eine Volumenzunahme um so leichter wird, je größer das Volumen bereits ist. Bei unserem Modell wird dies durch die Form der Rille erreicht, beim Stern durch den $1/r^2$-Zusammenhang im Gravitationsgesetz.

Schluss

Die Stabilität des nuklearen Brennens in den Sternen wird durch einen Rückkopplungsmechanismus ermöglicht, der auf der negativen spezifischen Wärme der Sterne beruht. Diese negative spezifische Wärme kann auch in einem einfachen Modellsystem realisiert werden. Mit einem solchen Modell können die mechanischen und thermodynamischen Eigenschaften der Sterne qualitativ verstanden werden, ohne die Zuhilfenahme von Differentialgleichungssystemen für Feldgrößen.

(Aus einem Vortrag auf den XI. Tagen der Schulastronomie 1997)