

Kosmologie: Expansion des Raums vs. Bewegung durch den Raum

Markus Pössel

Haus der Astronomie

Karlsruhe, 23. November 2018

Überblick

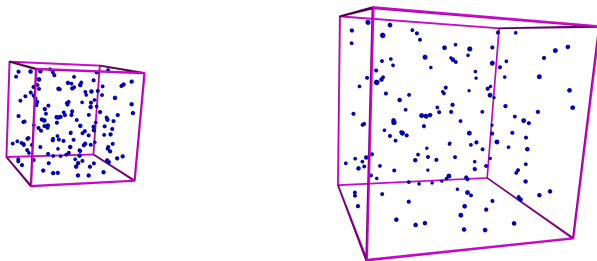
Kosmische Expansion und die beiden Fragen:

Wie passen überlichtschnelle Fluchtgeschwindigkeiten der Galaxien zur relativistischen Geschwindigkeitsbegrenzung?

Wie passt die kosmologische Rotverschiebung zur Energieerhaltung?

- 1 Grundlagen Expansion**
- 2 Licht**
- 3 Elastische Universen**
- 4 Relativistische Relativbewegung**
- 5 Kosmologie**

Kosmische Expansion



Grundsituation expandierendes Universum:

Verteilung der Galaxien (Muster) bleibt gleich

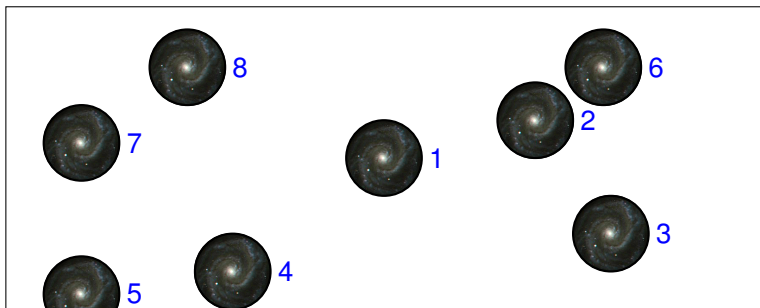
Skala der Abstände verändert sich

Zeitkoordinate **kosmische Zeit**

(= was mitbewegte Uhren auf den Galaxien anzeigen)

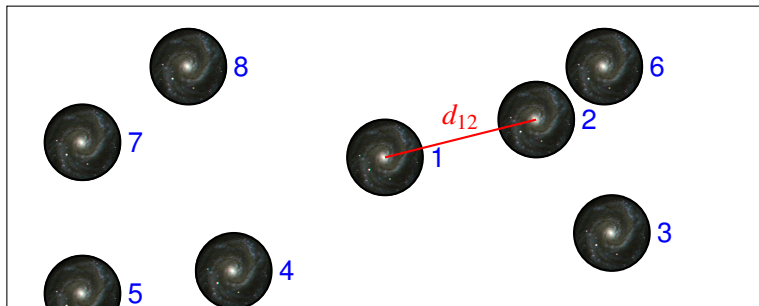
Ein statisches Universum

Galaxien durchnummerieren:



Ein statisches Universum

Anordnung vollständig beschrieben durch paarweise Abstände d_{ij} :

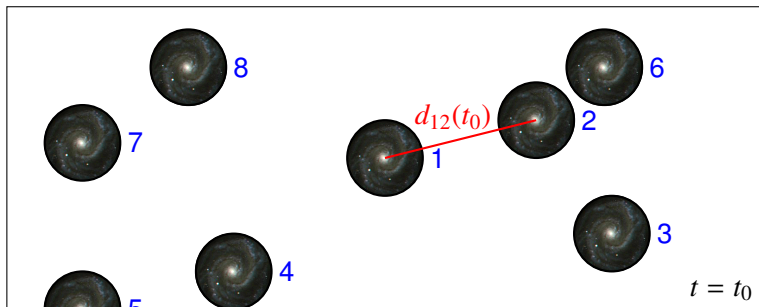


d_{ij} : Abstand zwischen Galaxie i und Galaxie j .

Abstände d_{ij} verändern sich nicht.

Abstände zwischen Galaxien

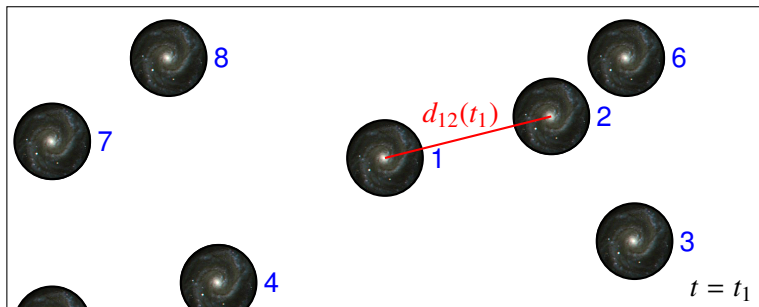
Galaxien „im Hubble-Fluss“ (*Hubble flow*):



Alle Abstände ändern sich wie $d_{ij}(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} \cdot d_{ij}(t_0)$.

Abstände zwischen Galaxien

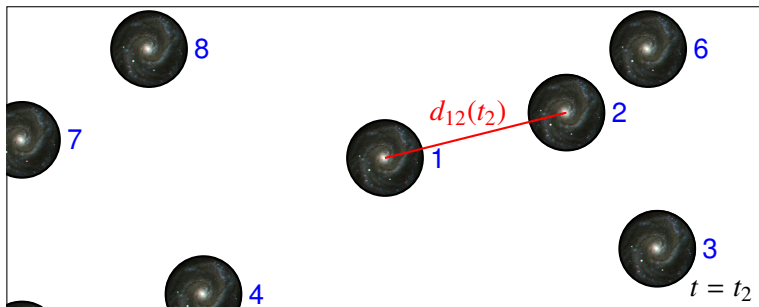
Galaxien „im Hubble-Fluss“ (*Hubble flow*):



Alle Abstände ändern sich wie $d_{ij}(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} \cdot d_{ij}(t_0)$.

Abstände zwischen Galaxien

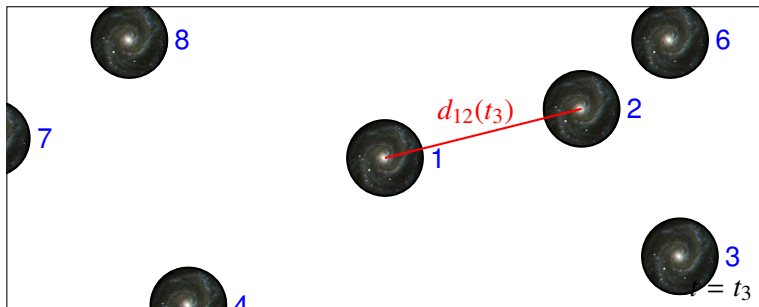
Galaxien „im Hubble-Fluss“ (*Hubble flow*):



Alle Abstände ändern sich wie $d_{ij}(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} \cdot d_{ij}(t_0)$.

Abstände zwischen Galaxien

Galaxien „im Hubble-Fluss“ (*Hubble flow*):



Alle Abstände ändern sich wie $d_{ij}(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} \cdot d_{ij}(t_0)$.

Konsequenzen der Skalenfaktor-Expansion

Wenn $d(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} d(t_0)$ und mit $v(t) \equiv \dot{d}(t)$ Fluchtgeschwindigkeit:

$$v(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d(t) = H(t) d(t)$$

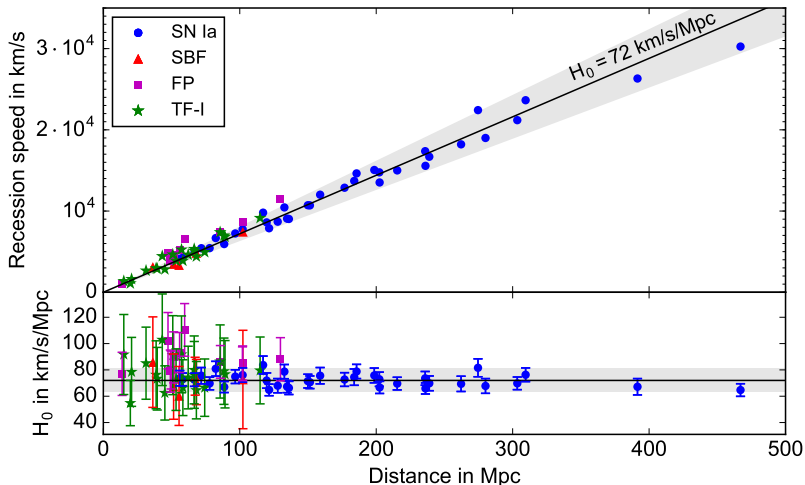
mit

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

dem **Hubble-Parameter**.

Heutiger Wert heißt **Hubble-Konstante** H_0

Konsequenzen der Skalenfaktor-Expansion



Daten aus Freedman et al. 2001

Gemessene/bestimmte Fluchtgeschwindigkeiten

Parametrisierung $v = cz$:

Objektname	z
Supernova SN1998ff (Typ Ia)	1.94
SDSS J232008.24+250520.7 (Galaxie im SDSS)	2.00
Quasar ULAS J1342+0928	7.54

Weit entfernte Objekte haben (in naiver Deutung) überlichtschnelle Fluchtgeschwindigkeit

Wie passen überlichtschnelle Fluchtgeschwindigkeiten zur relativistischen Geschwindigkeitsbegrenzung?

...und was ist mit Licht?

So weit, so gut — alles mit Alltags-Verständnis von Begriffen

Wichtig, aber weniger einfach: Was ist mit Licht?



Unsere Galaxie

Licht empfangen $t = t_e$

mit Wellenlänge λ_e



Ferne Galaxie

Licht ausgesandt $t = t_a$

mit Wellenlänge λ_a

Ergebnis vorweggenommen:

Rotverschiebung hängt direkt mit Skalenfaktor zusammen:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_a} = \frac{a(t_e)}{a(t_a)} = 1 + z$$

(nachmessbar anhand von Spektrallinien)

Einfluss der Expansion auf Licht

Wie den Einfluss von Expansion auf Licht ableiten?

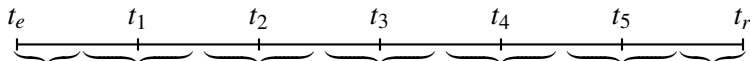
- 1 Allgemeine Relativitätstheorie, Geodätengleichung
- 2 Allgemeine Relativitätstheorie, Symmetrie und $ds^2 = 0$
- 3 Einstein'sches Äquivalenzprinzip und Symmetrie
- 4 klassischer Dopplereffekt (näherungsweise)
- 5 Bild des "expandierenden Raums"

Lichtausbreitung aus Äquivalenzprinzip

Nutze aus, dass t lokale Zeit für frei fallende Systeme ist, in denen im kleinen die SRT gilt (Einsteinsches Äquivalenzprinzip)

Teile jetzige ($t = t_r$) Distanz in N gleiche Teile Δr .

Gesamtreisezeit sei T :



$$T = \frac{\Delta r}{2c} \cdot \frac{a(t_e)}{a(t_r)} + \frac{\Delta r}{c} \cdot \frac{a(t_1)}{a(t_r)} + \frac{\Delta r}{c} \cdot \frac{a(t_2)}{a(t_r)} + \frac{\Delta r}{c} \cdot \frac{a(t_3)}{a(t_r)} + \frac{\Delta r}{c} \cdot \frac{a(t_4)}{a(t_r)} + \frac{\Delta r}{c} \cdot \frac{a(t_5)}{a(t_r)} + \frac{\Delta r}{2c}$$

Problem: Dort kommt Reisezeit für die Abschnitte implizit vor!

Lösung:

$$dt = \frac{dr}{c} \frac{a(t)}{a(t_r)} \Rightarrow \frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{c \cdot a(t_r)} \Rightarrow \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{c \cdot a(t_r)} d_{r,e}(t_r)$$

Kosmologische Rotverschiebung

Aus Integral

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{c \cdot a(t_r)} d_{r,e}(t_r)$$

folgt, da

$$\frac{1}{c \cdot a(t_r)} d_{r,e}(t_r) = \frac{1}{c \cdot a(t_r + \delta t_r)} d_{r,e}(t_r + \delta t_r)$$

gilt:

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_r + \delta t_r} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta t_r}{a(t_r)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)}$$

Einfluss der Expansion auf Licht

Licht verliert offenbar im expandierenden Universum an Energie.

Wie passt die kosmologische Rotverschiebung zur Energieerhaltung?

Energieverlust auch bei genauerer Betrachtung:

Massendichte ρ für Strahlung (Zustandsgleichung $p = \rho c^2/3$)
verdünnt sich wie

$$\rho(t) \sim \frac{1}{a(t)^4}.$$

Kosmische Expansion als elastisches Substrat



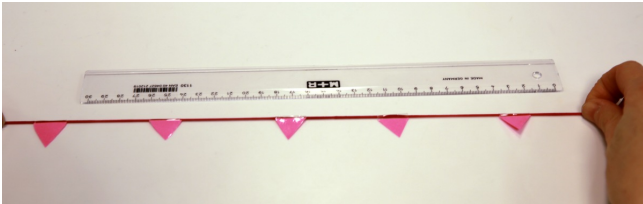
Bild rechts: Rosinenstuten aus mittelschwerem Hefeteig. User SKopp via Wikimedia Commons unter Lizenz CC BY-SA 3.0

(Elastisches) Substrat — meist: Gummi

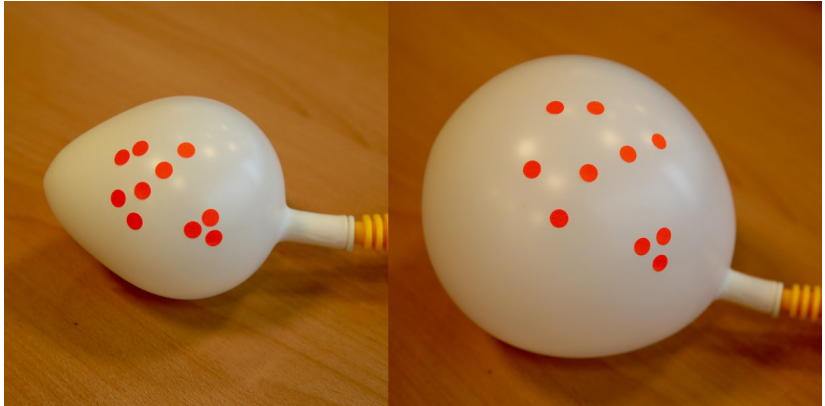
Pro: Skalenfaktor-Expansion veranschaulichen

Contra: Rückkehr zum materiellen Medium

Substrat-Expansion: Gummiband



Substrat-Expansion: Ballonmodell



Substrat-Expansion: Rotverschiebung

Ameisen, die aus fahrendem Auto springen



vs.

Ameisen auf dem Gummiband



Beide Abbildungen aus M. Pössel, *Das Einstein-Fenster*, Hoffmann und Campe 2005.

$\lambda \sim a(t)$ suggeriert direkten Zusammenhang zwischen
Rotverschiebung und (lokaler) Expansion

Elastische Antworten (nicht meine!)

Wie passen überlichtschnelle Fluchtgeschwindigkeiten zur relativistischen Geschwindigkeitsbegrenzung?

Die Galaxien bewegen sich nicht, sondern der Raum zwischen ihnen dehnt sich aus. Das ist etwas grundlegend anderes als Bewegung durch den Raum, daher greift die relativistische Geschwindigkeitsbegrenzung nicht.

Wie passt die kosmologische Rotverschiebung zur Energieerhaltung?

In der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt es keine globale Energieerhaltung. Daher ist kein Problem, wenn Licht im expandierenden Universum an Energie verliert.

Relativistische Relativbewegung

Galaxien im Hubble-Fluss: sind sie *in Bewegung*?

Frage der Verallgemeinerung der Relativbewegung
klassisch → relativistisch

Problem bei relativistischen Verallgemeinerungen:

Klassisch äquivalente Definitionen führen zu
unterschiedlichen relativistischen Konzepten

Paradebeispiel: Massenbegriff klassisch vs. speziell-relativistisch

Speziell-relativistische Relativgeschwindigkeit

Vereinfacht: nur Bewegungen in x -Richtung

- 1 Für $x(t)$ die Bahn eines Objekts im Inertialsystem S mit Koordinaten x, t ist $\dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit des Objekts relativ zu S
- 2 Für $d(t)$ der im System bei $t = \text{const.}$ bestimmte Abstand eines Objekts zum Nullpunkt des Inertialsystems S , gemessen in S , ist $\dot{d}(t)$ die Geschwindigkeit des Objekts relativ zum Nullpunkt
- 3 Für $d_R(t)$ der mithilfe von Radarmessungen vom Nullpunkt von S aus bestimmte Abstand eines Objekts ist $\dot{d}_R(t)$ die Geschwindigkeit des Objekts relativ zum Nullpunkt
- 4 Für U_1 und U_2 Vierergeschwindigkeiten zweier Objekte, bestimme deren Relativgeschwindigkeit v_{rel} aus $\gamma(v_{rel}) = \eta(U_1, U_2)/c^2$ [„mostly minus“-Konvention] mit $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ [nutze aus: im Inertialsystem hat ein bewegtes Objekt Vierergeschw. $U = \gamma(v)(c, \vec{v})$]

Kriterien zur Verallgemeinerung

Welche Eigenschaften sollte eine ART-Relativgeschwindigkeit haben?

- speziell-relativistisches Limit entspricht SRT-Definitionen
- koordinatenunabhängig
- symmetrisch
- $v \leq c$
- in statischen Situationen nicht-bewegte Objekte $v = 0$

... alles hinterfragbar. Die erste Option (reine Koordinatengeschwindigkeit) sortieren wir aber sofort aus.

Foliations-Relativgeschwindigkeit

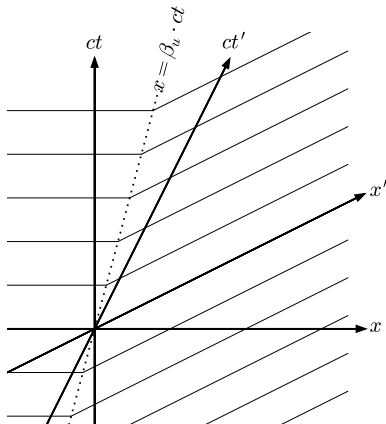
Für $d(t)$ der im System bei $t = \text{const.}$ bestimmte Abstand eines Objekts zum Nullpunkt des Inertialsystems S , gemessen in S , ist $\dot{d}(t)$ die Geschwindigkeit des Objekts relativ zum Nullpunkt

Verallgemeinerung auf ART:

- Definiere Zeitkoordinate/Hyperflächen der Gleichzeitigkeit \Rightarrow Foliation
- Verbinde Objekt auf geradestem Wege innerhalb einer geeigneten Hyperfläche mit Bezugspunkt
- Nutze Metrik, um Länge der Verbindung zu berechnen (aufintegrieren)

Foliations-Relativgeschwindigkeit

Einfaches Spielzeugmodell: Klebe zwei Inertialsysteme mit Relativgeschwindigkeit v zusammen (stetig, aber nicht differenzierbar):

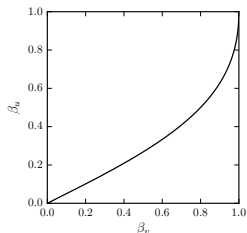


Nahtstelle bei

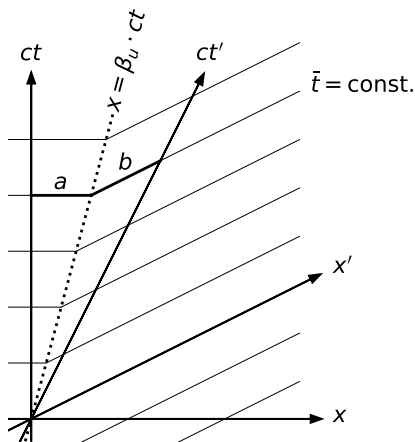
$$x = \beta_u \cdot ct$$

mit

$$\beta_u \equiv \frac{\gamma(v) - 1}{\gamma(v) \cdot v/c}$$



Foliations-Relativgeschwindigkeit



Foliations-Abstand der Nullpunkte von S und S' :
Berechne Länge a in S ,
dann b in S' , und addiere:

$$a = b = \beta_u \cdot ct$$

so dass

$$D = a + b = 2\beta_u \cdot ct.$$

Insbesondere: Foliations-
Relativgeschwindigkeit
ist

$$v_F = \dot{D} = 2\beta_u \cdot c.$$

Foliations-Relativgeschwindigkeit

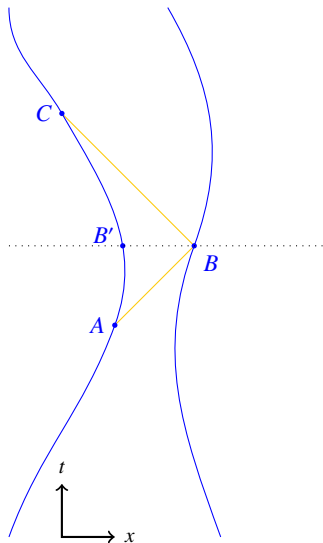
Foliations-Relativgeschwindigkeit:

- ist koordinatenabhängig
- gibt in SRT-Situationen nicht automatisch das SRT-Resultat
- führt zum Teil auf Überlichtgeschwindigkeiten

... aber das ist genau die übliche Definition von kosmologischen Fluchtgeschwindigkeiten: "proper distance" auf den Hyperflächen konstanter Zeit

(Spielzeugmodell mit zusammengenähten Inertialsystemen lässt sich zu komplettem kosmologischen Spielzeugmodell erweitern, incl. Hubble-Beziehung. Grenzwert unendlich dicht aneinandergfügter Inertialsysteme: Milne-Universum. Im Detail ausgeführt in Pössel 2018.)

Radarkoordinaten-Geschwindigkeit



Hängt von drei
Bewegungszuständen ab:
Beobachter bei Ereignis A und C ,
Objekt bei B

SRT-Lösung: Erkläre B und B'
als gleichzeitig

Aber, bei allgemeiner Bewegung:
 B und B' weitgehend
unabhängig!

Vierergeschwindigkeits-Vergleich

Vierergeschwindigkeiten auch in Allgemeiner Relativitätstheorie definiert,

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

mit τ der Eigenzeit als Kurvenparameter (Intervall folgt aus Metrik)

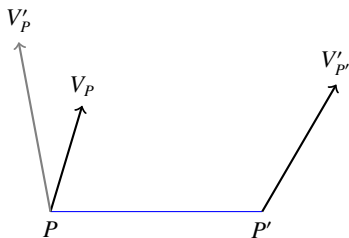
Konzept **Paralleltransport** wird wichtig bei Definition Ableitung:

Skalarfeld $\phi(x)$, Vektorfeld $u = u^\mu \partial_\mu$:

$$\nabla_u \phi = \frac{\phi(x + \epsilon u) - \phi(x)}{\epsilon} = u^\mu \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu}$$

... aber gesondertes Problem bei Vektoren: Komponenten hängen vom lokalen Koordinatensystem ab!

Vierergeschwindigkeits-Vergleich



Um eine physikalische Ableitung zu definieren, „Rücktransport“ nötig:

$$(\nabla_\nu V)^\nu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho,$$

mit $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ den Christoffel-Symbolen, für metrischen Zusammenhang

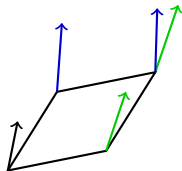
$$\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \left[\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda} \right]$$

Vierergeschwindigkeits-Vergleich

In ART-Einführungen vor allem für kovariante Ableitung und Krümmung eingeführt, aber Konzept des **Paralleltransports** ist allgemeiner anwendbar.

Vorteil: Skalarprodukte $g(U, V)$ bleiben erhalten, wenn Vektoren U, V entlang desselben Weges parallel transportiert werden

Problem: Paralleltransport ist i.A. vom Transportweg abhängig — das ist die *Definition* von Krümmung!



Vierergeschwindigkeits-Vergleich

Möglichkeit eindeutiger Definition (in begrenzter Umgebung):

Relativgeschwindigkeit von Teilchen $i = 1, 2$, Weltlinien $c_i(\lambda)$ mit 4er-Geschwindigkeiten $U_i(\lambda)$ mit Bahnparameter λ für die Ereignisse \mathcal{E}_1 auf c_1 und \mathcal{E}_2 auf c_2 :

- Definiere Geodäte, die durch \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 führt (eindeutig)
- Transportiere U_1 von \mathcal{E}_1 entlang der Geodäte nach \mathcal{E}_2 (äquivalent: umgekehrt)
- Bestimme v_{rel} aus $\gamma(v_{rel}) = g(U_1, U_2)/c^2$ evaluiert bei \mathcal{E}_2

(Lanczos 1923, Synge 1966, Narlikar 1994, Bolós 2007)

Paralleltransport: Vor- und Nachteile

Vorteile:

- Relativgeschwindigkeit $v_{rel} < c$
- symmetrisch
- koordinatenunabhängig

Nachteil:

- In statischer Situation mit Gravitation ist $v_{rel} \neq 0$ — kein Unterschied zwischen Dopplerverschiebung und Gravitations-Rotverschiebung! (siehe Narlikar 1994)

Zurück zur Kosmologie

Übliche Fluchtgeschwindigkeiten sind
Foliations-Relativgeschwindigkeiten — koordinatenabhängig!

Deutlich sichtbar beim Übergang zum materiefreien Kosmos: Milne
und verwandte Spielzeugmodelle

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Raumzeiten, für Galaxien
im Hubble-Fluss Paralleltransport entlang lichtartiger Geodäten:
 $v_{rel} < c$ so dass

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1 + v_{rel}/c}{1 - v_{rel}/c}}$$

Paralleltransport-Antworten

Wie passen überlichtschnelle Fluchtgeschwindigkeiten zur relativistischen Geschwindigkeitsbegrenzung?

Die Überlichtgeschwindigkeiten sind Koordinateneffekte einer bestimmten Verallgemeinerung des Begriffs Relativgeschwindigkeit. Mit Paralleltransport treten keine Überlichtgeschwindigkeiten auf. Einfaches, für Schüler/innen zugängliches Beispiel: Spielzeugmodell mit zusammengenähten Inertialsystemen

Wie passt die kosmologische Rotverschiebung zur Energieerhaltung?

Das kosmische Koordinatensystem ist so definiert, dass sich die Beobachter relativ zueinander bewegen. Beim Übergang von einem System zu einem relativ dazu bewegten System gilt schon in der SRT keine Energieerhaltung

Zum Weiterlesen

- M. Pössel 2017: *The Expanding Universe: An Introduction* (lecture notes). arXiv:1712.10315
- M. Pössel 2018: „Teaching cosmology with special relativity: Piecewise inertial frames as a model for cosmic expansion“ (Eur. J. Phys., in press, doi: 10.1088/1361-6404/aaf2f7 bzw. E-Print arXiv:1811.09524)