

GRAVITATIONSWELLEN

Friedrich W. Hehl, University of Cologne, hehl@thp.uni-koeln.de

Seminar, Freitag, 05.Juli 2019, 11:30 bis 13:00h

Physikhochhaus, KIT, Wolfgang-Gaede-Str.1, 76131 Karlsruhe

Seminarraum 2/11, 2. Stock, Seminarleiter Prof. Dr. Friedrich Herrmann

Dieses Seminar ist Herrn Kollegen Lothar Fritsche zu seinem
90. Geburtstage mit Respekt und Dank für sein immer
freundschaftlich-kollegiales Verhalten zugeeignet. Gleichzeitig danke ich für
die Einladung!

- Hehl & Paul von der Heyde: Gravitationswellen. Ein neues Fenster zum All?... Naturwiss. Rundschau 25, 419 (1972)
- Domenico Giulini & Claus Kiefer: Gravitationswellen. Einblicke in Theorie, Vorhersagen und Entdeckung. Springer (2016)
- Rüdiger Vaas: Signale der Schwerkraft. Gravitationswellen: Von Einsteins Erkenntnis zur...Astrophysik. Frankh-Kosmos, Stuttgart (2017)

Inhalt:

1. “Des Meeres und der Liebe Wellen”: Wellen überall, Wellensalat
2. Newtonsche Schwerkraft versus elektromagnetisches Feld
3. Gravitationswellen
4. Der Webersche Aluminium-Zylinder (1969/70)
5. Hulse-Taylor Binärpulsar PSR B1913+16 (1973)
6. Laserinterferometer: Die Dektoren LIGO (Hanford und Livingston), VIRGO (Pisa) und GEO600 (Hann.)
7. Direkte Entdeckung von Gravitationswellen durch LIGO (2016): das Ereignis GW150914
8. Bestätigungen am laufenden Band: GW151226, GW170104, GW170814, ...
9. Ein Ausblick auf LISA

1. “Des Meeres und der Liebe Wellen”: Wellen überall, Wellensalat

- ▶ Wasserwellen: Wirf einen Stein in einen Teich! transversale Oberflächenwellen, Energietransport durch longitudinale Ausbreitung: Energieflussvektor nach Mie (1898).
- ▶ In linearen Theorien können Wellen immer als Superposition aus harmonischen Wellen (\sin , \cos) zusammengesetzt werden: Fourier'sches Theorem. Phase der Welle $\phi(t, \vec{r}) = 2\pi(\kappa r - \nu t)$, Phasengeschwindigkeit $v_p = \nu/\kappa$. Welle auf Teich:
 $H(r, t) = A \sin[2\pi(\kappa r - \nu t)]$
- ▶ Schallwellen: In Gasen (z.B. Luft) longitudinal (Druckdifferenz), auch in Flüssigkeiten (und in Superfluiden), in Festkörpern longitudinal und transversal
- ▶ Elektromagnetische Wellen ($c = \lambda\nu$): In Vakuum und in Materie, transversal, Maxwell 1865. Hertz'scher Dipol: Dipolstrahlung, Vektorwellen $A_i = (\varphi, \vec{A})$ mit $\square A_i \sim J_i$ mit $\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$
- ▶ Lichtdruck Lebedev (1902), d.h. Impuls wird *transportiert*, Vakuum als Träger elektromagnetischer Wellen. Helizität 1 (“Spin 1”), Masse 0. Energie wird auch transportiert: Poynting, allg. Mie. Energie-Impuls-Tensor $T_{ij}|_{\text{elmg.}}$

2. Newtonsche Schwerkraft versus elektromagnetisches Feld

- ▶ Newtons Anziehungsgesetz quasi-feldtheoretisch formuliert: Poisson-Gleichung $\Delta \Phi(t, \mathbf{r}) = 4\pi G\rho(t, \mathbf{r})$, Gravitation stets *anziehend* [entweder skalares ϕ oder tensorielles Feld 2.Stufe h_{ij}]
- ▶ Coulombs Gesetz analog zu Newtons, aber Anziehung und Abstoßung. Fundamentalere Unterschied. Vektorfeld $\mathbf{A}_i = (\phi, \mathbf{A}_a)$
- ▶ Betrachte elektrische Punktladung: Siehe Abb.1 und Abb.2.
- ▶ Aus Abb.2 wird klar, wie es zu einer elektromagnetischen “Stoßwelle” kommt \rightarrow elektrostatische Poisson-Gleichung muss verallgemeinert werden (Maxwell): $\Delta \rightarrow \square$ (“Laplace” durch “d’Alembert” ersetzt).
- ▶ In der Gravitation bleibt es bei Newton Δ : Fernwirkungstheorie.

Elektrische Punktladung

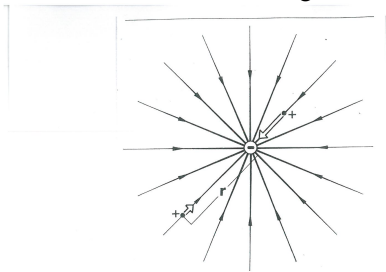


Abb. 1. Radialsymmetrisches Kraftfeld einer negativen elektrischen Punktladung. Die Kraft auf die kleinen positiven Probeladungen nimmt nach außen mit dem Quadrat des Abstandes r ab.

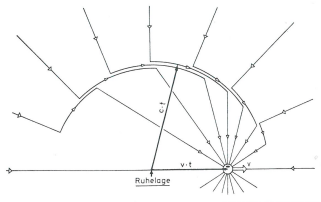


Abb. 2. Feld einer Ladung, die aus der Ruhelage plötzlich zur Zeit $t = 0$ auf eine konstante Geschwindigkeit v beschleunigt wurde. Die entstehende Welle hat den Weg $c \cdot t$, die Ladung die (stets kleinere) Strecke $v \cdot t$ zurückgelegt. Das räumliche Gesamtfeld erhält man durch Drehung um die Bewegungsrichtung der Ladung.

- ▶ Aus einer “elektrostatischen” Fernwirkungstheorie wird eine Feldtheorie, Faradays elektrotonischer Zustand: Coulomb (1785) → Oersted (1820) → Ampère (1823) → Faraday (ab ~1830) → Maxwell (1865) → Hertz (1888)
- ▶ Galilei-Newtonsche Mechanik wird konsistent mit der Elektrodynamik formuliert: Elektrodynamik bewegter Körper (ab ~1890): Hertz → Lorentz → Poincaré → Einstein → Minkowski (1908)
- ▶ Spezielle Relativität in der starren Minkowski’schen Welt
- ▶ Newtons Anziehungsgesetz bleibt Fernwirkungstheorie. Poincaré (1905): Gravitationswellen mit c in der Minkowski’schen Welt?
- ▶ Poincarés Spekulation hat nichts Direktes mit der Lösung Einsteins zu tun, die jener seit 1907 verfolgte und mit der Allgemeinen Relativität (AR) im November 1915 zum Erfolg führte. In der AR wird die Minkowski-Welt zu einer Riemannschen Raumzeit deformiert. Die Raumzeit selbst vibriert! Die Gravitationswellen sind Schwingungen der Raumzeit selbst.

3. Gravitationswellen

Einsteinsche Feldgleichung der Gravitation:

$$G_{ij} - \Lambda g_{ij} = \kappa^2 T_{ij}$$

$G_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R_k^k$ Einstein-Tensor, eine Verjüngung des 4-stufigen Krümmungstensors, $T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j - p g_{ij}$ für ein Eulerfluid, Λ kosmologische Konstante., $\kappa^2 = 8\pi G$, G Newtonsche Gravitationskonstante, Indizes $i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3$. Die Metrik $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ kann **näherungsweise** dargestellt werden (o_{ij} = Minkowski-Tensor):

$$g_{ij} = o_{ij} + h_{ij}, \quad \bar{h}_{ij} := h_{ij} - \frac{1}{2}o_{ij}h_k^k$$

G_{ij} durch Umeichen [vgl. Carlip, General Relativity, Oxford (2019)]:

$$G_{ij} = -\frac{1}{2}\square \bar{h}_{ij} + O(h^2)$$

$$\square \bar{h}_{ij} = -2\kappa^2 T_{ij} + O(h^2)$$

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = 4G \int d^3\mathbf{y} \frac{T_{ij}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

Große Entfernungen $R \gg r$ (r Lineardimension der gravitierenden Körper), dann ($a, b, c, \dots = 1, 2, 3$)

$$\bar{h}_{ab} \approx \frac{4G}{R} \int d^3\mathbf{y} T_{ab}(t - R, \mathbf{y})$$

Elektromagnetische Vektor- versus gravitative Tensorwellen

Abb. 5. Eine ebene und sinusförmige elektromagnetische Welle der Wellenlänge λ trifft auf eine kreisförmige Ladungsanordnung. Jeder Pfeil symbolisiert Größe und Richtung des Kraftfeldes in der gesamten Schnittebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung x_1 . Um den zeitlichen Ablauf zu verdeutlichen, zieht man die Welle wie ein starres Gebilde mit der Lichtgeschwindigkeit c über die Ladungen hinweg. Durch die wechselnde Feldrichtung werden diese dann in x_2 -Richtung mit der Wellenfrequenz hin und her beschleunigt. Die schraffierte Kugel stellt einen ungeladenen Probekörper dar, relativ zu dem die Beschleunigungen gemessen werden.

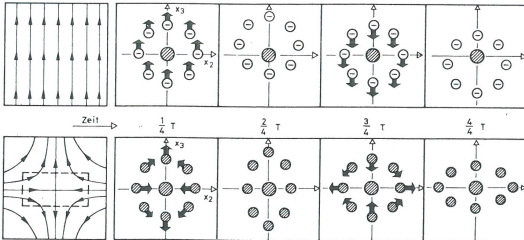
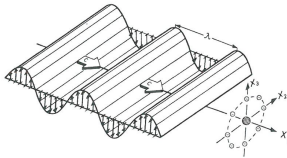


Abb. 6. Oben: Homogenes Kraftfeld im Querschnitt einer ebenen, sinusförmigen und linear in x_2 -Richtung polarisierten elektromagnetischen Welle der Frequenz $\nu = 1/T$ und die von ihr verursachte Verschiebung des Ladungskollektivs aus Abb. 5. Die Kreisform bleibt, untereinander gleiche Ladungen vorausgesetzt, erhalten. — Unten: Inhomogenes Kraftfeld im Querschnitt einer ebenen und sinusförmigen Gravitationswelle (der Polarisation α, β, γ). Ein analoges Kollektiv von Punktmassen wird elliptisch verformt. Um die zeitliche Änderung des jeweiligen Feldes in der ortsfesten Ladungs- beziehungsweise Massenenebene zu erfassen, beachte man, daß die eingezeichnete Lage der Feldlinie (Kraftrichtung) stets erhalten bleibt und die Kraft nur periodisch Stärke und Vorzeichen ändert.

- Wir definieren den Quadrupoltensor (Vorsicht Spur!):

$$Q^{ab} := x^a x^b T^{00}, \quad \partial_0 Q^{ab} = x^a x^b \partial_0 T^{00}$$

Wir verwenden die Energie-Identität und finden für die 2.Ableitung:

$$\partial_0^2 Q^{ab} = -\partial_c(\dots) + 2T^{ab}$$

Durch Integration unter Berücksichtigung der Randbeding. ergibt sich:

$$\bar{h}_{ab}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{2G}{R} \int_U d^3\mathbf{y} \partial_0^2 Q_{ab}(t-R, \mathbf{y}) = \frac{2G}{R} \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\int_U d^3\mathbf{y} y_a y_b T^{00}(t-R, \mathbf{y})}_{\text{Massen-Quadrupolmoment } I_{ab}}$$

Quadrupolstrahlung! Trägheitstensor!

- Ein gravitativ gebundenes System mit Massen, die sich mit kleinen Geschwindigkeit $v \ll c$ bewegen. Dann folgt, dass $v^2 \sim Gm/r$, $a \sim Gm/r^2$. Integriert man die über eine Kugel mit Radius R , dann ergibt sich für die abgestrahlte Leistung (siehe Carlip):

$$\boxed{P \sim \frac{G^4 m^5}{r^5 c^5}} \quad P = \frac{32G}{5c^5} \Omega^6 (I_1 - I_2)^2$$

Das gesamte Sonnensystem strahlt ungefähr 5 kW ab, vgl. die Abbildung. Ein binäres Neutronenstern-System etwa 10^{25} W. Ein zusammenfallendes stellares Schwarz-Loch-System kann etwa 10^{49} W abstrahlen...Mit dem Hulse-Taylor-Binär-Pulsar wurde dies bewiesen (Nobelpreis 1993).

Elektromagnetische und Gravitationswellen

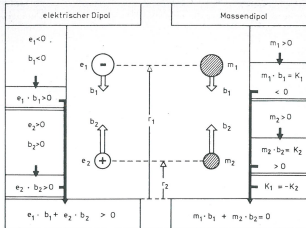
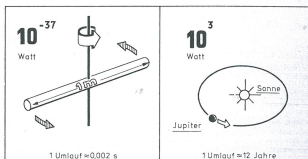


Abb. 3. Links: Elektrischer Dipol aus einer negativen und einer positiven Ladung, die sich durch Anziehung wechselseitig beschleunigen. Eine Beschleunigung b ist negativ, wenn sie dem zugehörigen Ortsvektor r entgegengerichtet ist. Der für Dipolstrahlung charakteristische Ausdruck ist in diesem Beispiel ungleich Null. Rechts: Massendipol aus zwei Massen, die sich etwas durch die allgemeine Massenanziehung gegenseitig beschleunigen. Der analoge Ausdruck verschwindet stets als Folge des Impulserhaltungssatzes $K_1 = -K_2$. Dies gilt auch für eine beliebige Anordnung mehrerer Massen sowie für beliebige beschleunigende Kräfte, solange das System nur abgeschlossen bleibt (zum Beispiel kann man die Massen an den Enden einer Feder befestigen).



4. Der Webersche Aluminium-Zylinder (1969/70)

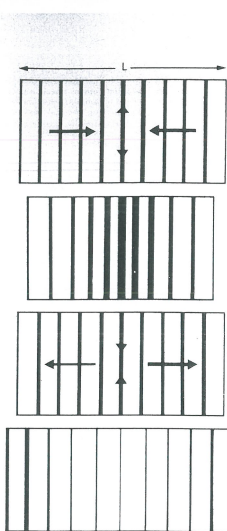


Abb. 7. Longitudinale Grundschwingung eines Metallzylinders der Länge L mit maximaler Materialdehnung und -steuchung in der Zylindermitte. Mögliche Oberschwingungen mit einem Vielfachen der Grundfrequenz erhalten bedeutend weniger Energie und können vernachlässigt werden. Zur Anregung der Grundschwingung durch Gravitationswellen vergleiche auch Abb. 6 links unten. Die relative Längenänderung des Zylinders ist in der Zeichnung stark übertrieben.

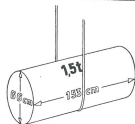


Abb. 8. Zum Nachweis von Gravitationswellen muß ein Zylinder so aufgehängt werden, daß seine longitudinale Schwingung möglichst wenig beeinträchtigt wird. Die Längen- und Gewichtsangaben beziehen sich auf die von Weiss im entscheidenden Experiment benutzten Zylinder.

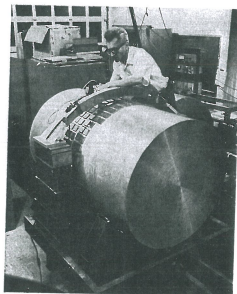


Abb. 9. Josef Weiss mit einem seiner Aluminiumzylinder. Deutlich sind die piezoelektrischen Quarzkristalle in der Mitte des Zylindermantels, dort wo die Materialspannungen am größten sind, zu erkennen.

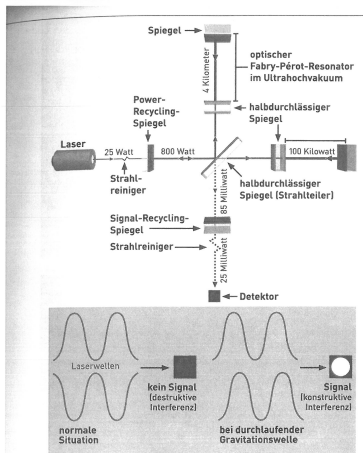
5. Hulse-Taylor Binärpulsar PSR B1913+16 (1973)

- ▶ Zeitliche Veränderung der Umlaufperiode eines Doppelsternsystems durch gravitative Abstrahlung
- ▶ Hulse-Taylor-Binärpulsar entdeckt mit Radioteleskop am Arecibo-Observatorium in Puerto Rico. Gravitative gebundenes Doppelsternsystem in 21 000 Lichtjahren Entfernung (also innerhalb unserer Milchstraße): PSR B1913+16
- ▶ 2 Neutronensterne mit 1,40 und 1,39 Sonnenmassen, der schwerere strahlt eine Radiofrequenz von etwa 1,4 GHz, Umlaufperiode von 7,75 h
- ▶ Aus den beobachteten Daten des Doppelpulsars und der Quadrupolformel läßt sich die Abnahme der Periodendauer

$$d(\text{Periode})/dt = 2,4025 \cdot 10^{-12}$$

- ▶ Daten von 1975 bis 2013 bestätigen diese Formel mit der Genauigkeit von etwa 0,2%. Nobelpreis 1993.
- ▶ Für jeden denkenden Physiker war danach klar: Gravitationswellen sind experimentell bestätigt! Deswegen habe ich die Begeisterungswelle, die 2016 emporschwappte, nicht wirklich teilen können.
- ▶ Was mich aber begeisterte war, dass es 2 Schwarze Löcher waren, die zusammenstürzten und am 14. September 2015 beobachtet wurden. Neben Sgr A* ist dies der klarste Beweis für die Existenz Schwarzer Löcher. Dies macht (für mich) die LIGO-Entdeckung zum Ereignis!

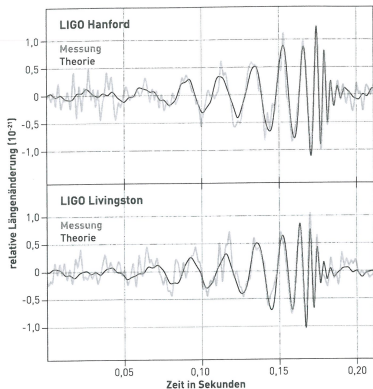
6. Laserinterferometer: Die Detektoren LIGO* (Hanford und Livingston), GEO600 (Hann.) und VIRGO (Pisa)



Wenn die Schwerkraft Wellen schlägt: Dann verändern sich Strecken, und das kann im Interferometer mit Laserstrahlen gemessen werden (oben), weil sich ihr Überlagerungsmuster charakteristisch ändert (unten).

© R.Vaas

7. Direkte Entdeckung von Gravitationswellen durch LIGO (2016): das Ereignis GW150914



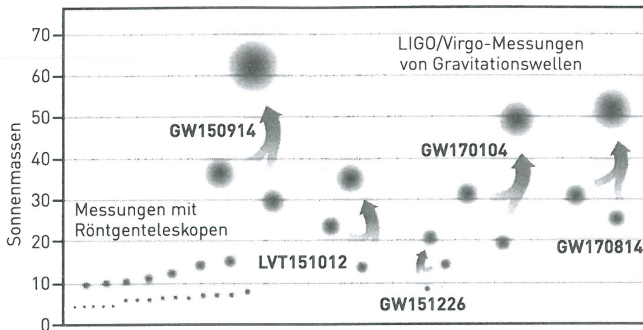
Himmliche Botschaft: Die Messkurven der Gravitationswellen GW150914 von der Kollision zweier Schwarzer Löcher mit jeweils rund 30 Sonnenmassen, aufgezeichnet von den beiden LIGO-Detektoren in Hanford (oben) und sieben Millisekunden vorher in Livingston (unten). Gezeigt ist die Stärke des Signals im Verlauf seiner Fünftelsekunde. Die beiden Datensätze stimmen exzellent miteinander überein – sowie auch mit der vorausgesagten Entwicklung, die auf Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie berechnet wurde (schwarze überlagerte Modellkurve).

8. Bestätigungen am laufenden Band: GW151226, GW170104, GW170814, ...

Eigenschaften	GW150914	LVT151012	GW151226	GW170104	GW170814
Datum Weltzeit	14. September 2015 09:50:45 Uhr	12. Oktober 2015 09:54:53 Uhr	26. Dezember 2015 03:38:53 Uhr	4. Januar 2017 10:11:59 Uhr	14. August 2017 10:30:43 Uhr
Signal-zu-Rauschen-Verhältnis	23,7	9,7	13,0	13,0	18,3
Fehlalarmrate in Jahren	600.000	2,3	44.000	>70.000	>27.000
Zeitabstand in Millisekunden zwischen LIGO Livingston und Hanford	7,0 (+0,2/-0,2)	-0,6 (+0,6/-0,6)	1,1 (+0,3/-0,3)	-3,0 (+0,4/-0,5)	8 14 (Virgo)
Dauer des Signals in Sekunden	0,2	0,5	1	0,9	0,3
Zahl der gemessenen Zyklen	10	25	55	29	15
Masse in Sonnenmassen:					
primäres Schwarzes Loch	36,2 (+5,2/-3,8)	23 (+18/-6)	14,2 (+8,3/-3,7)	31,2 (+8,4/-6,0)	30,5 (+5,7/-3,0)
sekundäres Schwarzes Loch	29,1 (+3,7/-4,4)	13 (+4/-5)	7,5 (+2,3/-2,3)	19,4 (+5,3/-5,9)	25,3 (+2,8/-4,2)
Chirp-Masse	28,1 (+1,8/-1,5)	15,1 (+1,4/-1,1)	8,9 (+0,3/-0,3)	21,1 (+2,4/-2,7)	24,1 (+1,4/-1,1)
finale Schwarzes Loch	62,3 (+3,7/-3,1)	35 (+14/-4)	20,8 (+6,1/-1,7)	48,7 (+5,7/-4,6)	53,2 (+3,2/-2,5)
abgestrahlte Energie	3,0 (+0,5/-0,5)	1,5 (+0,3/-0,4)	0,99 (+0,11/-0,17)	2,0 (+0,6/-0,7)	2,7 (+0,4/-0,3)
Maximaleuchtkraft in Watt (zum Vergleich: Sonne = $3,8 \cdot 10^{26}$)	$3,6 (+0,5/-0,4) \cdot 10^{49}$	$3,1 (+0,8/-1,8) \cdot 10^{49}$	$3,3 (+0,8/-1,6) \cdot 10^{49}$	$3,1 (+0,7/-1,3) \cdot 10^{49}$	$3,7 (+0,5/-0,5) \cdot 10^{49}$
effektiver Spin (0 = beide Spins orientiert wie Orbit-Drehimpuls)	-0,06 (+0,14/-0,14)	0,0 (+0,3/-0,2)	0,21 (+0,20/-0,10)	-0,12 (+0,21/-0,30)	0,06 (+0,12/-0,12)
finaler Spin (1 = Maximum)	0,68 (+0,05/-0,06)	0,66 (+0,09/-0,10)	0,74 (+0,06/-0,06)	0,64 (+0,09/-0,20)	0,70 (+0,07/-0,05)
Lokalisation in Quadratgrad	230	1600	850	1200	60 (1160 ohne Virgo)
Entfernung in Millionen Lichtjahren	1370 (+490/-590)	3330 (+1630/-1600)	1430 (+590/-620)	2870 (+1470/-1270)	1760 (+420/-690)
Rotverschiebung (z) der Quelle	0,090 (+0,029/-0,036)	0,201 (+0,086/-0,091)	0,094 (+0,035/-0,039)	0,176 (+0,078/-0,074)	0,11 (+0,03/-0,04)

© R.Vaas

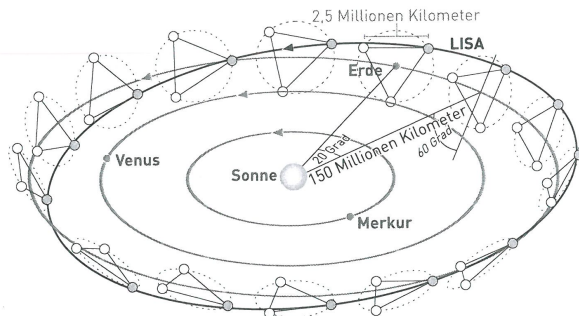
Massen der zusammenstoßenden Schwarzen Löcher



Parade der Schwerkraftmonster: LIGO hat bis zum Oktober 2017 offiziell vier Kollisionen Schwarzer Löcher aufgespürt und einen fünften Kandidaten. Dabei handelt es sich um die schwersten bekannten Schwarzen Löcher im stellaren Massenbereich überhaupt. Im Diagramm sind alle durch Messungen gut bestätigten Exemplare verzeichnet, entdeckt durch ihre Röntgenstrahlung (links) sowie mittels Gravitationswellen (rechts).

© R. Vaas

9. Ein Ausblick auf LISA



Himmliches Dreieck: Die LISA-Sonden bilden ein mit Laserstrahlen-Paaren aufgespanntes Dreieck. Es bewegt sich 20 Grad oder rund 50 Millionen Kilometer hinter der Erde um die Sonne. Die Orbits der drei Satelliten sind so zur Erdbahnebene geneigt, dass sich ein Winkel von 60 Grad des Dreiecks relativ zur Erdbahnebene ergibt.

© R.Vaas

Zusammenfassung

Es wird in einer Form, die jedem Masterstudenten der Physik und verwandter Fachrichtungen verstaendlich sein sollte, ein Grundwissen ueber Gravitationswellen vermittelt. Diese Wellen wurde im Rahmen der Allgemeinen Relativitaetstheorie 1915/16 vorhergesagt und dann in indirekter Form von Hulse und Taylor bei Doppelpulsaren am Ende des letzten Jahrhunderts entdeckt. Ein direkter Nachweis erfolgte 2016 mit Hilfe von Laserinterferometern von der sog. LIGO*-Kollaboration beim Verschmelzen zweier schwarzer Loecher.

- ▶ Hehl & Paul von der Heyde: Gravitationswellen. Ein neues Fenster zum All?... Naturwiss. Rundschau 25, 419 (1972)
- ▶ Domenico Giulini & Claus Kiefer: Gravitationswellen. Einblicke in Theorie, Vorhersagen und Entdeckung. Springer (2016)
- ▶ Rüdiger Vaas: Signale der Schwerkraft. Gravitationswellen: Von Einsteins Erkenntnis zur... Frankh-Kosmos, Stuttgart (2017)

*) Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory