H. Römer, M. Forger „Elementare Feldtheorie"
VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, ..., 1993

2.2 Impulsbilanz und Drehimpulsbilanz

Die Impulsbilanz stellt einen besonders interessanten und wichtigen Fall dar. Da der Impuls eine vektorielle Größe ist, haben wir drei Impulskomponenten getrennt zu bilanzieren. Wir schreiben $\rho_i^P(t,\boldsymbol{x})$ für die Dichte der i-ten Impulskomponente und $j_{ik}^P(t,\boldsymbol{x})$ für die k-Komponente der Stromdichte der i-ten Impulskomponente. In diesem Fall ist also das Dichtefeld bereits ein Vektorfeld und das Stromdichtefeld folglich ein Tensorfeld zweiter Stufe.

Als Quellen des Impulses kommen nur äußere Kräfte in Frage, die in das System hineingreifen, d.h. die Quelldichte für den Impuls ist eine *Kraftdichte*, die wir mit $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ bezeichnen. Dann lautet die Bilanzgleichung für den Impuls (im Indexkalkül geschrieben)

$$\frac{\partial \rho_i^P}{\partial t} + \nabla_k\, j_{ik}^P = f_i \,. \tag{2.11}$$

Ein äußeres Schwerefeld $\boldsymbol{g}$ führt beispielsweise zu einer Kraftdichte $\boldsymbol{f} = \rho\,\boldsymbol{g}$.

Die Impulsstromdichte hat noch eine weitere äußerst wichtige Interpretation, da $\boxed{\text{der pro Zeiteinheit durch eine Fläche strömende Impuls}}$ als Druckkraft auf diese Fläche angesehen werden kann: Genauer beschreibt j_{ik}^P die i-te Komponente der Kraft pro Fläche auf ein Flächenelement mit Normale in k-Richtung und

$$F_i = \int_F df_k\, j_{ik}^P \tag{2.12}$$

Hier ist die Fläche F nicht geschlossen!

demzufolge die i-te Komponente der gesamten durch den $\boxed{\text{Impulsstrom}}$ zustandekommenden Druckkraft auf eine Fläche F. Ist insbesondere F die Oberfläche ∂V eines Volumens V, so läßt sich Gl. (2.12) in die Form

$$F_i = \int_{\partial V} df_k\, j_{ik}^P = \int_V d^3x\, \nabla_k\, j_{ik}^P \tag{2.13}$$

umschreiben; dies ist die i-te Komponente der Druckkraft, die das Volumen V auf seine Umgebung ausübt.

In einem Fluid gilt offenbar

$$\rho_i^P = \rho v_i \tag{2.14}$$

und

$$j_{ik}^P = \rho v_i v_k + \sigma_{ik} \,, \tag{2.15}$$

wobei ρ die Massendichte und σ der (zunächst nicht weiter bestimmte) konduktive Anteil der Impulsstromdichte ist. Gemäß obiger Interpretation beschreibt σ denjenigen Anteil der Druckkräfte, der nicht durch die Strömung der Fluidteilchen zustandekommt, weshalb man σ auch als *Drucktensor* bezeichnet.

Ganz analog zur Impulsbilanz läßt sich die Drehimpulsbilanz formulieren; wieder sind drei Komponenten zu bilanzieren: Es sei $\rho_i^L(t,\boldsymbol{x})$ die Dichte der i-ten Drehimpulskomponente und $j_{ik}^L(t,\boldsymbol{x})$ die k-Komponente der Stromdichte der i-ten Drehimpulskomponente.