über, d. h., die Gesamtenergie eines Systems ist nach Abzug der Ruhenergie der Teilchen gleich dem negativen Mittelwert der kinetischen Energie. Dies stimmt mit dem Ergebnis überein, das man aus dem klassischen Virialsatz für ein System geladener Teilchen erhält, die nach dem COULOMBschen Gesetz wechselwirken.

§ 35. Der Energie-Impuls-Tensor makroskopischer Körper

Neben dem Energie-Impuls-Tensor eines Systems punktförmiger Teilchen benötigen wir später auch den entsprechenden Tensor für einen zusammengesetzten makroskopischen Körper.

Der Impulsstrom durch das Flächenelement eines Körpers ist gerade die auf dieses Element df wirkende Kraft und $\sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta$ daher die α-Komponente dieser Kraft. Wir benutzen ein Bezugssystem, in dem das df umschließende Volumenelement des Körpers ruht. In diesem System gilt das PASCALsche Gesetz, wonach der Druck p in jedem Teil des Körpers nach allen Richtungen gleich ist und senkrecht zu der Ebene wirkt, auf die er ausgeübt wird.[1])

Wir können daher $\sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta = p\, df_\alpha$ schreiben, woraus $\sigma_{\alpha\beta} = p\, \delta_{\alpha\beta}$ folgt. Die die Impulsdichte liefernden Komponenten $T^{\alpha 0}$ verschwinden in unserem Bezugssystem für das ins Auge gefaßte Volumenelement. Die Komponente T^{00} ist wie immer die Energiedichte des Körpers, die wir hier mit ε bezeichnen. ε/c^2 ist dann die Massendichte, d. h. die Masse in der Volumeneinheit des Körpers. Es ist zu beachten, daß hierbei die Einheit des Eigenvolumens gemeint ist, d. h. das Volumen in dem Bezugssystem, in dem das betrachtete Element des Körpers ruht.

In diesem Bezugssystem hat also der Energie-Impuls-Tensor (an einer Stelle des Körpers) die Gestalt

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{35,1}$$

Man findet hieraus leicht die Gestalt des Tensors in einem beliebigen Bezugssystem. Wir führen dazu die Vierergeschwindigkeit u^i der makroskopischen Bewegung unseres Volumenelementes ein. Im Ruhsystem dieses Elementes ist $u^i = (1,0,0,0)$. Der Tensor T^{ik} muß so gewählt werden, daß er im Ruhsystem die Gestalt (35,1) besitzt. Man prüft leicht nach, daß dies der Fall ist, wenn wir

$$T^{ik} = (p + \varepsilon)\, u^i u^k - p\, g^{ik} \tag{35,2}$$

setzen oder für die gemischten Komponenten

$$T_i^k = (p + \varepsilon)\, u_i u^k - p\, \delta_i^k .$$

[1]) Streng genommen gilt das PASCALsche Gesetz nur für Flüssigkeiten und Gase. Für feste Körper ist jedoch die maximal mögliche Druckdifferenz in verschiedenen Richtungen sehr klein im Vergleich zu den Drücken, die in der Relativitätstheorie eine Rolle spielen, und eine Berücksichtigung daher uninteressant.

oder endgültig

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho\, v^2}{2}+\varrho\,\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\varrho\,\boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]. \tag{6,1}$$

Um die Bedeutung der erhaltenen Gleichung zu finden, integrieren wir sie über irgendein Volumen

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\varrho\, v^2}{2}+\varrho\,\varepsilon\right)dV=-\int\operatorname{div}\left[\varrho\,\boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]dV\,.$$

Nachdem wir das rechts stehende Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umgeformt haben, wird daraus

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\varrho\, v^2}{2}+\varrho\,\varepsilon\right)dV=-\oint\varrho\,\boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)d\boldsymbol{f}\,. \tag{6,2}$$

Links steht die Energieänderung der Flüssigkeit pro Zeiteinheit in einem gegebenen Volumen. Das rechts stehende Oberflächenintegral ist folglich die Energiemenge, die pro Zeiteinheit aus dem betrachteten Volumen „herausfließt". Man kann daher offensichtlich den Ausdruck

$$\varrho\,\boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right) \tag{6,3}$$

als Vektor der „Energiestromdichte" bezeichnen. Sein Betrag gibt die Energiemenge an, die pro Zeiteinheit durch eine zur Richtung der Geschwindigkeit senkrechte Flächeneinheit fließt.

Der Ausdruck (6,3) zeigt, daß die Flüssigkeit pro Masseneinheit bei der Bewegung die Energie $w+\frac{v^2}{2}$ mit sich führt. Die Tatsache, daß hier die Enthalpie w und nicht einfach die innere Energie ε steht, hat eine einfache physikalische Bedeutung. Um diese zu finden, setzen wir $w=\varepsilon+\frac{p}{\varrho}$ ein und schreiben den gesamten Energiestrom durch eine geschlossene Oberfläche in der Form

$$-\oint\varrho\,\boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)d\boldsymbol{f}-\oint p\,\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{f}\,.$$

Der erste Term ist die (kinetische und innere) Energie, die von der Masse der Flüssigkeit (pro Zeiteinheit) unmittelbar durch die Oberfläche hindurch transportiert wird. Der zweite Term stellt die Arbeit dar, die von den Druckkräften an der Flüssigkeit innerhalb der Fläche geleistet wird.

§ 7. Der Impulsstrom

Wir geben jetzt eine ähnliche Ableitung für den Impuls der Flüssigkeit. Der Impuls pro Volumeneinheit ist $\varrho\,\boldsymbol{v}$. Wir bestimmen die Geschwindigkeit der Impulsänderung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\,\boldsymbol{v})\,.$$

Die Rechnungen sollen in Tensorschreibweise durchgeführt werden.[1]) Es ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\, v_i) = \varrho\,\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, v_i\,.$$

Wir benutzen die Kontinuitätsgleichung (1,2) $\left(\operatorname{div} \varrho\, \boldsymbol{v} \text{ schreiben wir als } \frac{\partial}{\partial x_k}\varrho\, v_k\right)$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial(\varrho\, v_k)}{\partial x_k}$$

und die EULERsche Gleichung (2,3) in der Form

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\, v_k\,\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial x_i}\,.$$

Dann erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\, v_i) = -\,\varrho\, v_k\,\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\,\frac{\partial(\varrho\, v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho\, v_i\, v_k)\,.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite schreiben wir in der Gestalt[2])

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik}\,\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

und finden schließlich

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\, v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}\,, \tag{7,1}$$

wo der Tensor Π_{ik} definiert ist als

$$\Pi_{ik} = p\,\delta_{ik} + \varrho\, v_i\, v_k\,. \tag{7,2}$$

Der Tensor Π_{ik} ist offensichtlich symmetrisch.

Um die Bedeutung des Tensors Π_{ik} aufzudecken, integrieren wir die Gleichung (7,1) über irgendein Volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, v_i\, dV = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}\, dV\,.$$

---

[1]) Lateinische Indizes $i, k, \ldots$ durchlaufen immer die Werte 1, 2, 3, die zu den Komponenten der Vektoren und Tensoren in Richtung der x-, y- bzw. z-Achse gehören. Im folgenden werden wir Summen der Art $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\, B_i$ einfach als A_iB_i schreiben und das Summenzeichen weglassen. Analog verfahren wir bei allen möglichen Multiplikationen von Vektoren und Tensoren: Über alle (in einem gegebenen Ausdruck) doppelt auftretenden lateinischen Indizes, wird immer über die Werte 1, 2 und 3 summiert. Die Indizes, über die summiert wird, bezeichnet man manchmal als „stumme" Indizes. Beim Umgang mit „stummen" Indizes muß man daran denken, daß jedes solche Indexpaar mit beliebigen (aber gleichen) Buchstaben bezeichnet werden kann; denn die Bezeichnung der Indizes, die alle möglichen Werte durchlaufen, beeinflußt natürlich nicht den Wert der Summe.

[2]) δ_{ik} bedeutet den *Einheitstensor*, d. h. den Tensor mit den Komponenten 1 für $i = k$ und 0 für $i \neq k$. Offensichtlich ist $\delta_{ik}A_k = A_i$, wenn A_i ein beliebiger Vektor ist. Analog gelten für einen Tensor zweiten Ranges A_{kl} die Beziehungen $\delta_{ik}A_{kl} = A_{il}$, $\delta_{ik}A_{ik} = A_{ii}$ usw.

Das auf der rechten Seite der Gleichung stehende Integral formen wir nach dem GAUSSschen Satz in ein Oberflächenintegral um[1]):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, v_i\, dV = -\oint \Pi_{ik}\, df_k\,. \tag{7,3}$$

Auf der linken Seite steht die Änderung der i-ten Impulskomponente pro Zeiteinheit in dem betrachteten Volumen. Das rechts stehende Oberflächenintegral gibt daher die Menge dieses Impulses an, die pro Zeiteinheit durch die das Volumen begrenzende Oberfläche „herausfließt". Folglich ist $\Pi_{ik}\, df_k$ die i-te Komponente des Impulses, der durch das Flächenelement df hindurchfließt. Schreiben wir df_k in der Form $n_k\, df$ (df ist der Betrag des Flächenelementes, $\boldsymbol{n}$ ist der Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normale), so finden wir, daß $\Pi_{ik}\, n_k$ der Strom der i-ten Impulskomponente pro Flächeneinheit der Oberfläche ist. Nach (7,2) ist $\Pi_{ik}\, n_k = p\, n_i + \varrho\, v_i\, v_k\, n_k$; dieser Ausdruck kann in Vektorform geschrieben werden als

$$p\,\boldsymbol{n} + \varrho\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{n})\,. \tag{7,4}$$

Somit ist Π_{ik} die i-te Komponente des Impulses, der pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zur x_k-Achse fließt. Den Tensor Π_{ik} bezeichnet man als *Tensor der Impulsstromdichte*. Die Energie ist eine skalare Größe, und der Energiestrom wird durch einen Vektor gegeben; der Impuls ist selbst ein Vektor, und der Impulsstrom wird durch einen Tensor zweiten Ranges bestimmt.

Der Vektor (7,4) gibt den Strom des Impulsvektors in $\boldsymbol{n}$-Richtung an, d. h. durch eine Fläche senkrecht zu $\boldsymbol{n}$. Wählen wir speziell als Richtung des Einheitsvektors $\boldsymbol{n}$ die Richtung der Geschwindigkeit der Flüssigkeit, so ergibt sich, daß in dieser Richtung nur eine longitudinale Impulskomponente übertragen wird. Die Dichte dieses Impulsstromes ist

$$p + \varrho\, v^2\,.$$

In einer zur Geschwindigkeit senkrechten Richtung wird nur eine (zu $\boldsymbol{v}$) transversale Impulskomponente übertragen, die entsprechende Stromdichte ist einfach gleich p.

§ 8. Die Erhaltung der Zirkulation

Das Integral

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{l}$$

über eine geschlossene Kurve heißt die *Zirkulation* längs dieser Kurve.

---

[1]) Die Regel für die Umformung eines Integrals über eine geschlossene Fläche in ein Integral über das in dieser Fläche enthaltene Volumen kann man folgendermaßen formulieren. Man ersetzt das Flächenelement df_i durch den Operator $dV\,\frac{\partial}{\partial x_i}$, der auf den ganzen Integranden angewendet werden muß:

$$df_i \to dV\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen in der üblichen Weise $\boldsymbol{E}$ (oder $\boldsymbol{H}$), so erhält man

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}.$$

Da $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H} = -\Delta\boldsymbol{H}$, gelangen wir zu der Wellengleichung

$$\Delta\boldsymbol{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in einem homogenen Dielektrikum

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{75,13}$$

beträgt.

Die Energiestromdichte besteht aus dem Energiestrom des elektromagnetischen Feldes und dem Energiestrom, der durch die unmittelbare Bewegung des Stoffes selbst bedingt ist. In einem unbeweglichen Medium (das wir auch betrachten) fehlt der letztgenannte Anteil, und die Energiestromdichte in einem dielektrischen Medium wird durch dieselbe Formel (30,20)

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}] \tag{75,14}$$

wie auch in Metallen gegeben. Man kann sich leicht davon überzeugen, indem man $\operatorname{div}\boldsymbol{S}$ berechnet. Benutzen wir die Gleichungen (75,4) und (75,9), so erhalten wir

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}) = -\frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{75,15}$$

in Übereinstimmung mit dem Ausdruck

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{B})$$

für das Differential der Dichte der inneren Energie des Dielektrikums bei gegebener Dichte und Entropiedichte.

Die allgemeinen Forderungen der relativistischen Invarianz führen dazu, daß die Energiestromdichte bis auf den Faktor c^2 mit der räumlichen Impulsdichte des Feldes zusammenfällt (s. II, §§ 32, 94). Die Impulsdichte ist daher gleich

$$\frac{1}{4\pi c}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]. \tag{75,16}$$

Dieser Umstand muß im besonderen bei der Bestimmung der Kräfte benutzt werden, die auf ein Dielektrikum im veränderlichen elektromagnetischen Feld wirken. Die Kraftdichte $\boldsymbol{f}$ kann aus dem Spannungstensor σ_{ik} berechnet werden:

$$f_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

Dabei muß man jedoch berücksichtigen, daß σ_{ik} sowohl die Impulsstromdichte des Stoffes als auch die des elektromagnetischen Feldes enthält. Verstehen wir unter $\boldsymbol{f}$

änderung ein Effekt höherer als zweiter Ordnung. Die Dichteänderung $\overline{\varrho'} = \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial p_0^2}\right) \frac{\overline{p'^2}}{2}$ verschwindet nicht. $\Big($Die Ableitung $\left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial p_0^2}\right)_s$ ist immer negativ, und deshalb ist in einer fortschreitenden Welle $\overline{\varrho'} < 0.\Big)$ In derselben Näherung haben wir für den Mittelwert des Tensors der Impulsstromdichte in einer fortschreitenden ebenen Welle

$$\overline{p}\,\delta_{ik} + \overline{\varrho\, v_i\, v_k} = p_0\,\delta_{ik} + \varrho_0\,\overline{v_i\, v_k}.$$

Der erste Term stammt vom Gleichgewichtsdruck und hat keine Beziehung zur Schallwelle. Im zweiten Term führen wir den Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ in $\boldsymbol{v}$-Richtung ein (die mit der Ausbreitungsrichtung der Welle übereinstimmt) und erhalten mit Hilfe der Beziehung (64,2) für die Impulsstromdichte in einer Schallwelle

$$\overline{\Pi}_{ik} = \overline{E}\, n_i\, n_k\,. \tag{64,12}$$

Schreitet die Welle in x-Richtung fort, dann ist nur die Komponente $\overline{\Pi}_{xx} = \overline{E}$ von Null verschieden. In der betrachteten Näherung gibt es also in einer Schallwelle nur einen mittleren Strom der x-Komponente des Impulses; dieser Strom fließt in x-Richtung.

§ 65. Reflexion und Brechung der Schallwellen

Trifft eine Schallwelle auf die Grenze zwischen zwei verschiedenen Medien (Flüssigkeiten oder Gasen), dann wird ein Teil von ihr reflektiert und ein Teil gebrochen. Außer der einfallenden Welle entstehen also noch zwei Wellen; die eine (die reflektierte) breitet sich von der Grenzfläche rückwärts in das erste Medium aus, die zweite (die gebrochene) breitet sich von der Grenzfläche in das zweite Medium aus. Im ersten Medium entsteht folglich eine Überlagerung zweier Wellen (einfallende und reflektierte); im zweiten Medium ist eine gebrochene Welle vorhanden.

Der Zusammenhang zwischen der einfallenden, der reflektierten und der gebrochenen Welle wird durch die Randbedingungen auf der Grenzfläche zwischen den beiden Medien bestimmt. Diese Randbedingungen verlangen, daß die Drücke und die Normalkomponenten der Geschwindigkeit auf der Grenzfläche gleich sind.

Wir wollen die Reflexion und die Brechung einer monochromatischen longitudinalen Welle an einer ebenen Grenzfläche behandeln. Die Grenzfläche wählen wir als yz-Ebene. Wie man leicht sieht, haben alle drei Wellen (einfallende, reflektierte und gebrochene) die gleiche Frequenz ω und gleiche Komponenten k_y und k_z des Wellenzahlvektors (die Komponente k_x senkrecht zur Grenzfläche wird nicht für alle drei Wellen gleich sein): In einem unbegrenzten homogenen Medium ist eine monochromatische Welle mit konstanten $\boldsymbol{k}$ und ω eine Lösung der Bewegungsgleichungen. Ist eine Grenzfläche vorhanden, so kommen nur Randbedingungen hinzu, die sich in unserem Falle auf $x = 0$ beziehen, d. h. weder von der Zeit noch von den Koordinaten y und z abhängen.