und es sind zwei Konstanten a und b erforderlich, um die elastischen Eigenschaften eines solchen Materials zu beschreiben. Wir überlassen es Ihnen darzulegen, daß für einen kubischen Kristall nur drei erforderlich sind.

Als ein letztes Beispiel, und dieses Mal für einen Tensor dritter Stufe, betrachten wir den piezoelektrischen Effekt. Unter dem Einfluß mechanischer Spannung erzeugt ein Kristall ein elektrisches Feld, das proportional der Spannung ist; folglich lautet das Gesetz im allgemeinen

$$E_i = \sum_{j,k} P_{ijk} S_{jk},$$

wobei E_i das elektrische Feld darstellt und die P_{ijk} die piezoelektrischen Koeffizienten sind – oder der piezoelektrische Tensor. Können Sie zeigen, daß die piezoelektrischen Koeffizienten alle Null sind, wenn der Kristall ein Inversionszentrum (invariant bei $x, y, z \to -x, -y, -z$) hat?

31–8 Der Vierertensor des elektromagnetischen Impulses

Alle Tensoren, die wir bisher in diesem Kapitel untersucht haben, beziehen sich auf die drei Dimensionen im Raum; definitionsgemäß haben sie eine bestimmte Transformationseigenschaft bei räumlichen Drehungen. In Kapitel 26 hatten wir die Gelegenheit, einen Tensor in den vier Dimensionen der relativistischen Raumzeit zu verwenden – den elektromagnetischen Feldtensor $F_{\mu\nu}$. Die Komponenten eines solchen Vierertensors transformieren sich bei einer Lorentztransformation der Koordinaten auf eine besondere Weise, die wir berechnet haben. (Obwohl wir nicht so vorgegangen sind, hätten wir die Lorentztransformation auch als eine „Drehung" in einem vierdimensionalen „Raum" – dem sogenannten Minkowski-Raum – betrachten können; dann wäre die Analogie zu dem, was wir hier machen, klarer gewesen.)

Als unser letztes Beispiel wollen wir einen anderen Tensor in den vier Dimensionen (t, x, y, z) der Relativitätstheorie betrachten. Als wir den Spannungstensor anschrieben, haben wir S_{ij} als eine Komponente einer Kraft definiert, die durch eine Flächeneinheit wirkt. Aber die Kraft ist gleich der zeitlichen Änderungsrate eines Impulses. Statt daher zu sagen „S_{xy} ist die x-Komponente des Impulses durch eine Flächeneinheit senkrecht zu y", könnten wir genauso gut sagen „S_{xy} ist die Strömungsrate der x-Komponente des Impulses durch eine Flächeneinheit senkrecht zu y". Mit anderen Worten, jede Komponente von S_{ij} stellt außerdem die Strömung der i-Komponente des Impulses durch eine Flächeneinheit senkrecht zur j-Richtung dar. Es handelt sich um reine Raumkomponenten, aber sie sind Teile eines „größeren" Tensors $S_{\mu\nu}$ in vier Dimensionen (μ und $\nu = t, x, y, z$), der zusätzliche Komponenten wie S_{tx}, S_{yt}, S_{it} etc. enthält. Versuchen wir nun, die physikalische Bedeutung dieser zusätzlichen Komponenten zu finden.

Wir wissen, daß die Raumkomponenten die Impulsströmung darstellen. Wir können einen Hinweis erhalten, wie das auf die Zeitdimension zu übertragen ist, indem wir einen anderen „Strömungsvorgang" untersuchen – die Strömung der elektrischen Ladung. Für die *skalare* Größe, Ladung, ist die Strömungsrate (pro Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung) ein räumlicher *Vektor* – der Vektor j der Stromdichte. Wir haben gesehen, daß die Zeitkomponente dieses Strömungsvektors die Dichte von dem ist, was strömt. Zum Beispiel kann j mit einer Zeitkomponente $j_t = \rho$, der Ladungsdichte, kombiniert werden, um den Vierervektor $j_\mu = (\rho, j)$ zu bilden; das heißt, daß μ in j_μ die Werte t, x, y, z annimmt, um die „Dichte, die Strömungsrate in der x-Richtung, die Strömungsrate in der y-Richtung, die Strömungsrate in der z-Richtung" der skalaren Ladung auszudrücken.

In Analogie zu unserer Aussage bezüglich der Zeitkomponente der Strömung einer skalaren Größe können wir erwarten, daß es neben S_{xx}, S_{xy} und S_{xz}, die die Strömung der x-Komponente des Impulses beschreiben, eine Zeitkomponente S_{xt} geben muß, die die Dichte von dem ist, was fließt; das heißt, daß S_{xt} die Dichte des x-Impulses sein muß. Wir können also unseren Tensor horizontal um eine t-Komponente erweitern. Dann ist

$$\begin{aligned}
S_{xt} &= \text{Dichte des } x\text{-Impulses},\\
S_{xx} &= x\text{-Strömung des } x\text{-Impulses},\\
S_{xy} &= y\text{-Strömung des } x\text{-Impulses},\\
S_{xz} &= z\text{-Strömung des } x\text{-Impulses}.
\end{aligned}$$

Ebenso haben wir für die y-Komponente des Impulses die drei Komponenten der Strömung – S_{yx}, S_{yy}, S_{yz} – zu denen wir einen vierten Ausdruck hinzufügen:

$$S_{yt} = \text{Dichte des } y\text{-Impulses}.$$

Und natürlich ist zu S_{zx}, S_{zy}, S_{zz} hinzuzufügen

$$S_{zt} = \text{Dichte des } z\text{-Impulses}.$$

Im vierdimensionalen Raum gibt es außerdem eine t-Komponente des Impulses, die bekanntlich die Energie ist. Der Tensor S_{ij} muß sich dann vertikal um S_{tx}, S_{ty} und S_{tz} erweitern, wobei

$$\begin{aligned}
S_{tx} &= x\text{-Strömung der Energie},\\
S_{ty} &= y\text{-Strömung der Energie},\\
S_{tz} &= z\text{-Strömung der Energie};
\end{aligned}\tag{31.28}$$

das heißt, S_{tx} ist die Energieströmung pro Flächen- und pro Zeiteinheit durch eine Oberfläche senkrecht zur x-Achse, und so fort. Zur Vervollständigung unseres Tensors benötigen wir schließlich noch S_{tt}, die *Energiedichte*. Wir haben unseren dreidimensionalen Spannungstensor S_{ij} zu dem vierdimensionalen *Energie-Impulstensor* $S_{\mu\nu}$ erweitert. Der Index μ kann die Werte t, x, y und z annehmen und bedeutet dann „Dichte", „Strömung pro Flächeneinheit in der x-Richtung", „Strömung pro Flächeneinheit in der y-Richtung" bzw. „Strömung pro Flächeneinheit in der z-Richtung". In derselben Weise nimmt ν die vier Werte t, x, y, z an und sagt dann aus, *was* strömt, nämlich „Energie", „Impuls in der x-Richtung", „Impuls in der y-Richtung" und „Impuls in der z-Richtung".

Um ein Beispiel zu geben, untersuchen wir diesen Tensor nicht in Materie, sondern in einem freien Raumbereich, in dem es ein elektromagnetisches Feld gibt. Wir wissen, daß die Energieströmung der Poynting-Vektor $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ist. Relativistisch gesehen sind die x-, y- und z-Komponenten von $\boldsymbol{S}$ die Komponenten S_{tx}, S_{ty} und S_{tz} unseres vierdimensionalen Energie-Impulstensors. Die Symmetrie des Tensors S_{ij} überträgt sich auch auf die Zeitkomponenten und somit ist der vierdimensionale Tensor $S_{\mu\nu}$ symmetrisch:

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}. \tag{31.29}$$

Mit anderen Worten, die Komponenten S_{xt}, S_{yt}, S_{zt}, die die *Dichten* des x-, y- und z-*Impulses* darstellen, sind auch gleich den x-, y- und z-Komponenten des Poynting-Vektors $\boldsymbol{S}$, der *Energieströmung* – was wir schon in einem früheren Kapitel durch eine andere Beweisführung gezeigt haben.

Die übrigen Komponenten des elektromagnetischen Spannungstensors $S_{\mu\nu}$ können auch durch die elektrischen und magnetischen Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ ausgedrückt werden. Damit ist gesagt, daß wir dem elektromagnetischen Feld auch mechanische Spannungen oder – weniger geheimnisvoll ausgedrückt – Impulsströmung zugestehen müssen. Wir haben das in Kapitel 27 in Zusammenhang mit Gl. (27.21) diskutiert, aber wir haben die Einzelheiten nicht ausgeführt.

Wer von Ihnen sich heldenhaft im Umgang mit vierdimensionalen Tensoren üben will, der möchte vielleicht die Formel für $S_{\mu\nu}$ in Termen der Feldstärken sehen:

$$S_{\mu\nu} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\sum_{\alpha} F_{\mu\alpha}F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4}\,\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha,\beta} F_{\beta\alpha}F_{\beta\alpha}\right),$$

wobei die Summen über α und β über t, x, y, z laufen, wobei wir aber (wie in der Relativitätstheorie üblich) eine spezielle Bedeutung für das Summenzeichen Σ und das Symbol δ verwenden. In den Summen müssen die x-, y-, z-Ausdrücke *subtrahiert* werden, und $\delta_{tt} = +1$, während $\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = -1$ und für $\mu \neq \nu$ $\delta_{\mu\nu} = 0$ $(c = 1)$. Können Sie beweisen, daß man die Energiedichte $S_{tt} = (\epsilon_0/2)\,(E^2 + B^2)$ und den Poynting-Vektor $\epsilon_0\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ erhält? Können Sie zeigen, daß in einem elektrostatischen Feld mit $\boldsymbol{B} = 0$ die Hauptachsen der mechanischen Spannung in der Richtung des elektrischen Feldes liegen, daß es eine mechanische *Spannung* $(\epsilon_0/2)E^2$ entlang der Feldrichtung gibt, und daß der *Druck* in allen Richtungen senkrecht zur Feldrichtung gleich ist?