

## Ergänzende Bemerkungen zum DPG-Gutachten über den Karlsruher Physikkurs

Matthias Bartelmann<sup>1</sup>, Fabian Bühler<sup>2</sup>, Siegfried Großmann<sup>3</sup>, Wolfhard Herzog<sup>4</sup>, Jörg Hüfner<sup>1</sup>, Rudolf Lehn<sup>2, 5</sup>, Rudolf Löhken<sup>4</sup>, Karlheinz Meier<sup>1</sup>, Dieter Meschede<sup>6</sup>, Peter Reineker<sup>7</sup>, Metin Tolan<sup>8</sup>, Jochen Wambach<sup>9</sup>, und Werner Weber<sup>8</sup>

<sup>1</sup>Universität Heidelberg

<sup>2</sup>Störck-Gymnasium Bad Saulgau

<sup>3</sup>Universität Marburg

<sup>4</sup>Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung Heidelberg

<sup>5</sup>Schülerforschungszentrum Südwürttemberg

<sup>6</sup>Universität Bonn

<sup>7</sup>Universität Ulm

<sup>8</sup>Technische Universität Dortmund

<sup>9</sup>Technische Universität Darmstadt

9. April 2013

## Einleitung

Das am 28. Februar 2013 veröffentlichte, von der DPG in Auftrag gegebene Fachgutachten beurteilt den Karlsruher Physikkurs (KPK) anhand der von den Autoren des KPK selbst für den Gebrauch in der Sekundarstufe II herausgegebenen Unterrichtsmaterialien. Es zeigt Widersprüche und fachliche Fehler des KPK in drei wesentlichen Bereichen der Physik auf: der Mechanik, der Thermodynamik und der Physik von Magnetfeldern und elektromagnetischen Wellen. Das Gutachten verwendet dabei bewusst die Sprache der vorliegenden Lehrmaterialien sowie einige der dort verwendeten Abbildungen. Auf diese Weise sollte die mangelnde Eignung von Begriffen und Zusammenhängen des KPK für den Physikunterricht an Schulen besonders deutlich herausgearbeitet werden.

Die hier vorgelegten Ergänzungen verfolgen ein komplementäres Ziel. Sie entsprechen dem von einigen Fachphysikern geäußerten Wunsch, die vorgebrachte Kritik über die Alltagsbeispiele hinaus auch mit fundamentalen Prinzipien der Physik zu begründen. Diese Ergänzungen eignen sich naturgemäß weniger für die Argumentation außerhalb der Physik, mögen aber als Material für die Diskussion unter Fachkollegen hilfreich sein. Die Erläuterungen beziehen sich nur auf die Bereiche Mechanik und Elektrodynamik. In den anderen Bereichen erfordern die uns vorliegenden Kommentare keine tiefere Diskussion.

Die Argumente zur mangelnden Anschlussfähigkeit eines Schulunterrichts nach dem KPK, die im Gutachten genannt wurden, werden ausdrücklich aufrechterhalten. Die hier vorgelegten Ergänzungen dienen der vertieften fachlichen Diskussion.

Dem Gegenstand des Gutachtens gemäß sprechen wir verkürzt vom KPK, wenn die KPK-Lehrbücher für den Unterricht in der Sekundarstufe II gemeint sind. Viele der im Folgenden aufgestellten und begründeten Aussagen gelten jedoch auch für den KPK als physikalisches Konzept.

## Kurze Zusammenfassung

Der KPK gibt die Newtonschen Axiome *de facto* auf und geht zur Kontinuumsmechanik über. Dies verschleiern, dass die Kontinuumsmechanik fundamental auf den drei Newtonschen Axiomen beruht. Sie überwindet nicht die Newtonschen Axiome, sondern wendet sie unter geeigneten Näherungsannahmen an. Präzise Begriffe der Trägheit, des Inertialsystems und des Reaktionsprinzips stehen dem KPK nicht mehr zur Verfügung.

Die Kontinuitätsgleichung der Kontinuumsmechanik setzt in ihrer integralen Formulierung die Impulsänderung innerhalb eines beliebigen Volumens dem negativen Netto-Impulsstrom durch den *geschlossenen* Rand dieses Volumens gleich. Anhand konkreter Rechnungen, ausgehend von der korrekten Darstellung durch G. Falk [1], wird im Folgenden belegt:

- Der korrekte Impulsstrom entsteht durch Integration über *geschlossene* Oberflächen. Stattdessen integriert der KPK über beliebige, insbesondere auch offene Flächen. Deswegen erfüllt der KPK-Impulsstrom im Allgemeinen die Impulserhaltung nicht und täuscht insbesondere in statischen Situationen Impulsströme vor, in denen kein physikalischer Impuls fließt.
- Die geschlossenen Randflächen müssen lokal längs ihrer äußeren Flächennormale orientiert werden. Stattdessen führt der KPK durch Verabredung die Orientierung längs einer beliebig gewählten  $x$ -Achse ein. Dies bewirkt das fehlerhafte Transformationsverhalten des KPK-Impulsstroms unter Drehungen.

Der KPK führt entgegen experimenteller Evidenz magnetische Ladungen als Quellen des magnetischen Feldes ein. Dadurch wird eine Analogie zum elektrischen Feld konstruiert, die den fundamentalen Unterschied zwischen elektrischen und magnetischen Feldern verschleiern. Anhand konkreter Rechnungen, ausgehend von der korrekten Darstellung durch J. D. Jackson [2], wird im Folgenden belegt:

- Quellen von magnetischen Erregungsfeldern  $\vec{H}$  sind entweder elektrische Ströme oder die räumlich veränderliche Magnetisierung eines Mediums. Das magnetische  $\vec{B}$ -Feld (Induktion), das die Lorentzkraft bestimmt, hat keine Quellen. Entgegen der Darstellung des KPK entspricht die Magnetisierung eines Mediums keiner magnetischen Ladungsdichte, sondern einer magnetischen Dipoldichte.

## Abschnitt I: Impulsströme in der Mechanik

### Übersicht

Üblicherweise beginnt ein Physikunterricht in der Mechanik, indem die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluss einer Kraft  $\vec{F}$  behandelt wird, wobei die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad (1)$$

im Mittelpunkt steht. Im Unterschied dazu wird im Karlsruher Physikkurs (KPK) in der Mechanik von Anfang an auf der Grundlage von Strömen argumentiert. Diese lassen sich aber korrekt nur mithilfe von Begriffen (und der Mathematik) der Mechanik kontinuierlicher Medien behandeln.

Bei einer kontinuierlichen Beschreibung der Materie wird jedem Ort  $\vec{x}$  im Raum eine Massendichte  $\rho$  und eine Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zugeordnet. An die Stelle der Newton'schen Bewegungsgleichung tritt die Euler'sche Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{v}) dV + \int_V \operatorname{div} \overleftrightarrow{T} dV = 0, \quad (2)$$

wobei  $\overleftrightarrow{T}$  ein Tensor zweiter Stufe ist, der die Impulsstromdichte beschreibt. Er wird gewöhnlich auch als Spannungstensor bezeichnet. Integriert wird hier über ein beliebig aus dem Kontinuum herausgegriffenes Volumen  $V$ . Das Volumenintegral über die Divergenz des Tensors  $\overleftrightarrow{T}$  ergibt den Netto-Impulsstrom  $\vec{I}^N$ ,

$$\vec{I}^N = \int_V \operatorname{div} \overleftrightarrow{T} dV. \quad (3)$$

Umschließt das Volumen  $V$  den Körper, dessen Bewegung beschrieben werden soll, dann ergibt sich aus den Gleichungen (1), (2) und (3)

$$\dot{\vec{p}} + \vec{I}^N = 0 \quad (4)$$

für die Bewegung des Körpers. Bis auf ein Vorzeichen sind also  $\vec{I}^N$  und die Newton'sche Kraft  $\vec{F}$  gleich. Interpretiert man  $\dot{\vec{p}}$  als materiellen Impulsstrom, dann hat die Gleichung (4) die Form der Impulserhaltung.

Das Volumenintegral über die Divergenz des Tensors  $\overleftrightarrow{T}$  der Impulsstromdichte kann nach dem Gauß'schen Satz durch ein Integral über die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  des Volumens  $V$  ersetzt werden,

$$\int_V \operatorname{div} \overleftrightarrow{T} dV = \vec{I} = \int_{\partial V} \overleftrightarrow{T} d\vec{A}, \quad (5)$$

wobei das Flächenelement  $d\vec{A}$  entlang der äußeren Flächennormale gerichtet ist. Entscheidend ist, dass die Fläche, über die hier zu integrieren ist, *geschlossen* ist.

Demgegenüber definiert der KPK den Impulsstrom durch [3]

$$\vec{I}^{\text{KPK}} = \int_A \overleftrightarrow{T} d\vec{A}, \quad (6)$$

wobei die Fläche  $A$  jeweils geeignet gewählt wird und insbesondere *offen* sein kann. Für offene Flächen kann aber die Bewegungsgleichung  $\dot{\vec{p}} + \vec{I}^{\text{KPK}} = 0$  *nicht* bewiesen werden. Die Kraft, die

dann dem negativen KPK-Impulsstrom gleichgesetzt würde, ist im allgemeinen *nicht* die Kraft, die gemäß dem zweiten Newton'schen Axiom als Ursache der Impulsänderung anzusehen ist. Zwar wird im KPK behauptet, dass die Impulsstromstärke  $I^{\text{KPK}}$  gleich der Stärke der Kraft sei, aber diese Behauptung ist falsch, wie weiter unten in Beispielen gezeigt werden wird. Das erste wesentliche Problem des KPK-Impulsstroms entsteht daher aus der Integration:

*Während der korrekte Netto-Impulsstrom durch ein geschlossenes Flächenintegral aus der Impulsstromdichte zu berechnen ist und daher in statischen Situationen verschwindet, lässt der KPK-Impulsstrom offene Flächen zu und erkennt daher Impulsströme auch in statischen Situationen, in denen kein physikalischer Impuls strömt.*

Im Mechanik-Band des Schulbuchs für die Sekundarstufe II [4] behandelt der KPK hauptsächlich eindimensionale Probleme. Die Fläche  $A_1$ , die hier auftritt, wird durch Verabredung anstelle von physikalischen oder geometrischen Argumenten entlang der positiven  $x$ -Achse gerichtet. Hierin besteht das zweite wesentliche Problem des KPK-Impulsstroms:

*Während in einer korrekten Beschreibung die Fläche, über die die Impulsstromdichte zu integrieren ist, entlang der äußeren Flächennormale gerichtet sein muss, richtet sie der KPK willkürlich entlang der positiven  $x$ -Achse aus. Deswegen transformiert sich der KPK-Impulsstrom unter Koordinatendrehungen nicht als Vektor, auch wenn das im Schulbuch zum KPK [4] suggeriert wird, indem der KPK-Impulsstrom als Vektor gezeichnet wird.*

Das dritte wesentliche Problem des KPK-Impulsstroms ist, dass er die Analogie zu einer materiellen Strömung auch in Situationen sucht, in denen erkennbar nichts strömt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der Tensor  $\overleftrightarrow{T}$  der Impulsstromdichte den inneren Spannungen eines kontinuierlichen Mediums entspricht, das sich im statischen Gleichgewicht befindet.

In solchen Fällen führt die Integration der Impulsstromdichte über offene Flächen mit willkürlicher Ausrichtung längs der  $x$ -Achse zu einem KPK-Impulsstrom, dem kein physikalischer, d.h. kein messbarer, Impulsstrom entspricht.

Wir betonen, dass sich die Kritik des Gutachtens nicht gegen das Konzept des Impulsstroms als solches wendet, sondern gegen seine fehlerhafte Umsetzung im KPK, die zu Widersprüchen führt, auf die das Gutachten hinweist.

Diese Aussagen werden im Folgenden durch ausführliche theoretische Entwicklungen und Beispielrechnungen belegt. Wir beginnen mit einigen Überlegungen zur Rolle der Newton'schen Axiome in der Mechanik und ihrer Behandlung im KPK-Schulbuch [4].

## **Newton'sche Axiome**

Ein erheblicher Anteil der fundamentalen Schwierigkeiten des KPK rührt daher, dass er *de facto* die Newton'schen Axiome aufgibt. Zwar wird im Abschnitt 2.10 im Mechanik-Band des Schulbuchs für die Sekundarstufe II [4, S. 21] noch „das Newton'sche Gesetz“ erwähnt, allerdings finden sich dort zwei bemerkenswerte Aussagen darüber: Zum einen wird das zweite Newton'sche Axiom, die Bewegungsgleichung, so eingeführt, dass es nur mehr eine Tautologie formuliert. Die Kraft wird nicht mehr als Ursache einer Impulsänderung angesehen. Stattdessen wird die Newton'sche Bewegungsgleichung zu einer reinen Bilanzgleichung des Impulses. Zum anderen wird behauptet, es gebe eigentlich drei Newton'sche Gesetze, aber „die anderen beiden“ seien Spezialfälle des zweiten. In der Mechanik formulieren die drei Newton'schen Axiome jedoch Aussagen,

die strikt voneinander zu trennen sind.

Das erste ist das Trägheitsgesetz. Es legt fest, dass Körper sich geradlinig-gleichförmig bewegen, solange keine Kräfte auf sie einwirken. Das zweite verbindet Kräfte und Impulsänderungen und formuliert damit die Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. Das dritte ist das Reaktionsgesetz, das besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Summe aller Kräfte verschwindet.

Ohne das erste Newton'sche Axiom ist der Begriff des Inertialsystems nicht formulierbar. Da Kräfte ohne Inertialsysteme nicht eindeutig definierbar sind, ist auch das erste Newton'sche Axiom keineswegs ein Spezialfall des zweiten. Trägheitskräfte wie die Zentrifugal- oder die Corioliskraft, die in nicht-inertialen Bezugssystemen auftreten, sind im KPK deswegen kaum erklärbar und kommen folgerichtig im Schulbuch für die Sekundarstufe II auch nicht vor. Das zweite Newton'sche Axiom verbindet jedoch zwei völlig verschiedene Entitäten, die Kraft und die Beschleunigung eines Körpers, auf den die Kraft wirkt. Es besagt, dass Impulsänderungen durch Kräfte verursacht werden, wobei Kräfte in der Newton'schen Mechanik aus der Erfahrung bzw. durch Messungen gewonnen werden und als Eigenschaft der jeweils gegebenen Umgebung angesehen werden. Erst die Bewegungsgleichung erlaubt zu berechnen, wie Körper sich unter dem Einfluss von Kräften bewegen. Erst indem man das zweite Newton'sche Axiom mit dem dritten verbindet, folgt die Impulserhaltung in geschlossenen mechanischen Systemen. Trägheitsbewegung in Inertialsystemen, Impulsänderung durch Kräfte und das Reaktionsprinzip sind in der Mechanik drei strikt voneinander zu unterscheidende Aussagen.

Physik beruht immer auf Axiomen, aus denen Schlussfolgerungen gezogen werden, die experimentell prüfbar sein müssen. Die Forderung nach experimenteller Prüfbarkeit setzt voraus, dass die Schlussfolgerungen oder Vorhersagen der Physik quantifizierbar sein müssen. Deswegen müssen die physikalischen Gesetze mathematisch formuliert sein. Mathematische Gleichungen gewinnen aber erst durch eine präzise Semantik einen physikalischen Sinn, durch die den mathematischen Größen eine wiederum messbare Bedeutung unterlegt wird.

Die Axiomensysteme der Physik werden von den Physikern aufgrund von Beobachtungen und Analysen experimenteller Ergebnisse aufgestellt. Ihrer Formulierung geht die Entscheidung voraus, welche verschiedenen fundamentalen Größen der physikalischen Theorie zugrunde gelegt werden sollen. Die Newton'sche Mechanik kennt die vier fundamentalen Größen Körper, Kräfte, Raum und Zeit. Die Newton'schen Axiome legen fest, wie sich Körper unter dem Einfluss von Kräften mit der Zeit durch den Raum bewegen. Die strikte und präzise Unterscheidung zwischen diesen vier Grundgrößen und den axiomatischen Gesetzen, durch welche sie verbunden werden, ist für die Mechanik unerlässlich.

Der KPK gibt diese Axiome *de facto* auf. Er erklärt aber nicht, was an ihre Stelle treten soll. Damit wird zum einen dem fundamentalen und alltäglich erfahrbaren Phänomen der Trägheit die Grundlage entzogen. Entsprechend ist im KPK-Schulbuch für die Sekundarstufe II von Trägheit nur noch im Zusammenhang mit dem Trägheitsmoment rotierender Körper und beim Vergleich träger mit schwerer Masse die Rede. Hierin zeigt sich auch, dass der Begriff des Inertialsystems nicht mehr zur Verfügung steht, so dass im KPK erst im Zusammenhang mit dem freien Fall und der Unterscheidung zwischen träger und schwerer Masse wieder von Trägheit gesprochen werden kann. Dass Trägheit eine alltäglich erfahrbare Eigenschaft von Körpern ist, aufgrund derer

sie sich einer Beschleunigung durch eine Kraft widersetzen, bleibt im KPK deswegen unklar, weil er die begriffliche Schärfe des ersten Newton'schen Axioms aufgegeben hat. Zum zweiten wird das zweite Newton'sche Axiom durch die Gleichsetzung von Kräften und Impulsströmen zur Tautologie. Damit wird die Bewegungsgleichung aufgegeben, so dass letztlich nicht mehr angebar ist, warum Impuls überhaupt strömen sollte. Mit dem dritten Newton'schen Axiom entfällt zum dritten der Grund für die Impulserhaltung in abgeschlossenen mechanischen Systemen. Impulserhaltung muss im KPK eigens gefordert werden und wird dementsprechend auch als absolut gültig behauptet, obwohl Noethers Theoreme auch alle Erhaltungsgrößen in physikalischen Systemen auf ihre Symmetrien zurückführen und damit unter Voraussetzungen stellen, die erfüllt oder verletzt sein können.

## Kräfte und Felder

Natürlich ist es in der Physik zulässig, neue Theorien zu entwickeln, indem bestehende Axiomensysteme durch andere ersetzt werden oder indem der Theorie andere fundamentale Größen zugrunde gelegt werden. Dies ist in der Physik mehrfach geschehen: Die Feldtheorie, die sich aus der Beschreibung elektromagnetischer Phänomene entwickelt hat, verbindet Kräfte mit dem Raum zum Begriff des Kraftfeldes. Solche Felder sind jedoch erst dann physikalisch beschreibbar, wenn ihre Dynamik durch Feldgleichungen vorgegeben wird, die wiederum quantitativ prüfbare Aussagen ermöglichen. Ein Beispiel sind die elektromagnetischen Felder, die durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben werden. Weitere Beispiele stellen die Übergänge zunächst zur speziellen, dann zur allgemeinen Relativitätstheorie dar.

Das Konzept des Impulsstroms bzw. der Impulsstromdichte stammt aus der Feldtheorie und der verwandten Kontinuumsdynamik und ist dort präzise definiert. Impulsstromdichten werden durch Tensoren zweiter Stufe dargestellt, die sich auf eindeutige Weise aus den fundamentalen Annahmen der jeweiligen Theorie ergeben; genauer durch Legendretransformation aus der Lagrangedichte der Theorie. Diese Tensoren werden allgemein als Spannungstensoren bezeichnet. Eine einfachere Darstellung als durch Tensoren ist nicht möglich, weil Impulsstromdichten für jede Komponente des Impulses angeben müssen, wie sie in jede räumliche Richtung fließt. Impulsströme ergeben sich, indem Spannungstensoren mit geeigneten Vektoren kontrahiert werden, z.B. mit dem Vektor eines gerichteten Flächenelements.

Impulsstromdichten zeichnen räumliche Richtungen aus, die durch ihre Struktur und damit durch die Physik vorgegeben sind und keine Willkür zulassen. Tensoren zweiter Stufe haben im dreidimensionalen Raum drei Hauptachsen. Durch die Kontraktion solcher Tensoren mit einem Vektor ergibt sich ein Vektor, der wiederum eine ausgezeichnete Richtung im Raum definiert. Unter Drehungen im Raum verhalten sich Tensorelemente anders als Vektorkomponenten, so dass zwischen Impulsstromdichten und Impulsströmen insbesondere bei der Drehung von Bezugssystemen strikt unterschieden werden muss.

Wir verdeutlichen nun die obige Einführung anhand von zwei korrekt durchgeführten Beispielen, den Impulsstromdichten im elektromagnetischen Feld und in der Strömungs- oder Kontinuumsmechanik. In den anschließenden Beispielen (ab S. 11) zeigen wir, welche Auswirkungen die Integration der Impulsstromdichte über offene statt geschlossener Flächen hat.

### Spannungstensor des elektromagnetischen Feldes

Der Maxwell'sche Spannungstensor  $\overleftrightarrow{T}^{\text{ED}}$  des freien elektromagnetischen Feldes im Vakuum, das aus dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  und dem Magnetfeld  $\vec{B}$  besteht, wird durch die Matrix mit den Komponenten

$$T_{ij}^{\text{ED}} = \epsilon_0 \left( \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{2} \vec{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right) \quad (7)$$

dargestellt, mit  $1 \leq i, j \leq 3$ . „ED“ steht hier für „Elektrodynamik“. Das ist die Impulsstromdichte des elektromagnetischen Feldes, das sich, wenn die Felder von der Zeit abhängen, in Form elektromagnetischer Wellen ausbreitet. Die Tensorkomponenten haben die Dimension einer Energiedichte oder einer Impulsstromdichte, also eines Impulses pro Zeit- und Flächeneinheit.

Stellt man diesem Feld ein kleines, gerichtetes Flächenelement  $\vec{n}dA$  in den Weg, dessen Richtung durch die äußere Flächennormale  $\vec{n}$  und dessen Fläche durch  $dA$  gegeben sind und das die elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert, ergibt sich der infinitesimale, elektromagnetische Impulsstrom  $d\vec{I}^{\text{ED}}$  in diese Fläche, indem man die obige Matrix mit  $\vec{n}dA$  multipliziert,

$$dI_i^{\text{ED}} = \sum_{j=1}^3 T_{ij}^{\text{ED}} n_j dA . \quad (8)$$

Dieser infinitesimale Impulsstrom hat die Dimension eines Impulses pro Zeit und damit einer Kraft. Die gesamte Kraft, die ein Körper durch das strömende elektromagnetische Feld übertragen bekommt, ist das negative Integral der Impulsstromdichte über eine Fläche  $A$ , die den Körper umschließt,

$$F_i^{\text{ED}} = - \int_A \sum_{j=1}^3 T_{ij}^{\text{ED}} n_j dA . \quad (9)$$

Mit dieser Kraft kann das elektromagnetische Feld aufgrund des zweiten Newton'schen Axioms den Körper beschleunigen. Im Beispiel eines effektiv eindimensionalen elektrostatischen Problems (z.B. für das homogene elektrische Feld innerhalb eines ausgedehnten Plattenkondensators) nimmt die einzige relevante Komponente des Maxwell'schen Spannungstensors (7) die Form

$$T_{11}^{\text{ED}} = -\frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \quad (10)$$

an. Die Kraft auf die Kondensatorplatte folgt aus (9), wobei nur diejenige Oberfläche  $A$  der Platte, die dem Inneren des Kondensators zugewandt ist, zum Integral beiträgt. Damit ergibt sich

$$F_1^{\text{ED}} = \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 A = \frac{1}{2} q E_1 , \quad (11)$$

worin  $q$  die Gesamtladung der Platte ist. Diese bekannten Ausdrücke werden auch in der Schule besprochen.

### Spannungstensor der Strömungs- und Kontinuumsmechanik

Das zweite Beispiel betrifft die Impulsstromdichte eines kontinuierlichen Mediums mit der Dichte  $\rho$ . Aus geeigneten Momenten der Boltzmann-Gleichung ergibt sich unmittelbar der Spannungstensor der Kontinuumsdynamik (mit „KD“ bezeichnet),

$$T_{ij}^{\text{KD}} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij} , \quad (12)$$

wobei  $\vec{v}$  die mittlere, makroskopische Geschwindigkeit des Mediums ist. Der erste Term,  $\rho v_i v_j$ , gibt die materielle Impulsstromdichte an: Die  $i$ -te Komponente der Impulsdichte  $\rho v_i$  wird mit der Geschwindigkeit  $v_j$  in die  $j$ -Richtung transportiert. Der zweite Term,  $\sigma_{ij}$ , ist der Tensor der inneren Spannungen des kontinuierlichen Mediums. Diese können beispielsweise durch die Elastizität des Mediums gegeben sein. Für eine in  $x$ -Richtung eingespannte Feder mit der Federkonstante  $k$ , der Querschnittsfläche  $A_1$  und der Ruhelänge  $l_0$  ist z.B. die Komponente  $\sigma_{11}$  des Spannungstensors durch

$$\sigma_{11}A_1 = k(l - l_0) \quad (13)$$

gegeben. Je nachdem, ob die Feder unter Druck- oder Zugspannung steht, ist  $l < l_0$  oder  $l > l_0$ , wodurch sich das Vorzeichen von  $\sigma_{11}$  entsprechend einstellt. Im Fall einer isotropen Flüssigkeit oder eines Gases ist  $\overleftrightarrow{\sigma}$  durch den Druck  $P$  gegeben,

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} . \quad (14)$$

Wiederum haben die Komponenten dieses kontinuumsdynamischen Spannungstensors die Dimension einer Energiedichte.

Wir betonen, dass die Gleichungen der Kontinuumsmechanik, zu denen neben der Euler'schen Gleichung die Erhaltungsgleichungen der Masse und der Energie gehören, nicht als Gleichungen einer Theorie zu verstehen sind, die über die Newton'sche Mechanik hinausgeht. Stattdessen formulieren diese Gleichungen auf makroskopischer Ebene, was durch die Stoßinvarianten auf mikroskopischer Ebene vorgegeben ist. Die mikroskopischen Stöße unterliegen aber der Newton'schen Mechanik. Beispielsweise setzt die Euler'sche Gleichung der Kontinuumsmechanik Impulserhaltung auf mikroskopischer Ebene voraus, die wiederum aufgrund des dritten Newton'schen Axioms gilt. Zusätzlich zu den Newton'schen Axiomen baut die Kontinuumsmechanik aber auf der weiteren Annahme auf, dass die Zeit- und Längenskalen mikroskopischer Stoßvorgänge sehr klein gegenüber den relevanten makroskopischen Skalen sind. In diesem Sinn ist die Kontinuumsmechanik keine Theorie, die über die Newton'sche Mechanik hinausgeht, sondern eine Anwendung der Newton'schen Mechanik in einer angemessenen Näherung.

## Grundgleichungen

Mithilfe des Spannungstensors lässt sich die Euler'sche Gleichung der Kontinuumsdynamik in der Form

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}^{\text{KD}}}{\partial x_j} = 0 \quad (15)$$

schreiben. Diese Gleichung drückt nichts anderes aus als das zweite Newton'sche Axiom, spezialisiert auf kontinuierliche Medien: Die zeitliche Änderung der materiellen Impulsdichte ( $\rho v_i$ ) des Mediums wird durch die Divergenz innerer Spannungen verursacht, zu denen beispielsweise der Druck gehören kann. Die Euler'sche Gleichung kann als die Kontinuitätsgleichung für die Impulsdichte interpretiert werden und damit als lokale Erhaltungsgleichung des Impulses. Befindet sich das Medium in einem zusätzlichen äußeren Kraftfeld, genügt es, den Spannungstensor des Mediums um denjenigen des äußeren Feldes zu ergänzen. Beispielsweise führt die Ersetzung

$$\overleftrightarrow{T}^{\text{KD}} \rightarrow \overleftrightarrow{T}^{\text{KD}} + \overleftrightarrow{T}^{\text{ED}} \quad (16)$$

geradewegs zur Eulergleichung der Magnetohydrodynamik. Dann wird die materielle Impulsdichte  $\rho v_i$  des Mediums nicht allein durch seine inneren Spannungen verändert, sondern zusätzlich durch die Maxwell'schen Spannungen des elektromagnetischen Feldes. Wenn die inneren Spannungen durch einen isotropen Druck  $P$  dargestellt werden können, tritt an die Stelle der Divergenz von  $\overleftrightarrow{\sigma}$  der einfache Druckgradient

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} . \quad (17)$$

Die inneren oder äußeren Spannungstensoren, für die wir hier  $\overleftrightarrow{\sigma}$  oder  $\overleftrightarrow{T}^{\text{ED}}$  als Beispiele eingeführt haben, stellen auch im Fall der Kontinuumsdynamik Impulsstromdichten dar. Werden sie über *geschlossene* Flächen integriert, geben sie den Netto-Impulsstrom an, d.h. die Differenz der Impulsströme, die in das Volumen einfließen und derer, die es verlassen. Integriert man stattdessen über eine *offene* Fläche und setzt den so erhaltenen Teil des Impulsstroms dem gesamten Impulsstrom gleich, verletzt man in der Regel die Impulserhaltung, die durch die Eulergleichung (15) ausgedrückt wird (vgl. dazu [3]). Zudem zeigen die beiden Beiträge  $\rho v_i v_j$  und  $\sigma_{ij}$  zum Spannungstensor der Kontinuumsmechanik, dass die Impulsstromdichte einem materiell strömenden Medium entsprechen kann, aber keineswegs muss. Wir betonen hier ausdrücklich, dass diese Darstellung mit derjenigen vollkommen im Einklang ist, die Gottfried Falk, der an der Universität Karlsruhe das Institut für die Didaktik der Naturwissenschaften leitete, in seinem Buch [1] auf Seite 71 gibt.

Integriert man die Eulergleichung (15) über ein beliebig aus dem Kontinuum gegriffenes Volumen  $V$ , erhält man mithilfe des Gauß'schen Satzes

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho v_i) dV + \int_A \sum_{j=1}^3 (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) dA_j = 0 , \quad (18)$$

wobei  $A$  die Fläche ist, die das Volumen  $V$  umschließt. Wenn die inneren Spannungen durch einen Druck dargestellt werden,  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ , besagt die letzte Gleichung beispielsweise, dass eine Flüssigkeit oder ein Gas durch einen Druckgradienten in Bewegung gesetzt wird.

## Beispiele

Um diese eher abstrakte Diskussion durch Beispiele zu illustrieren, behandeln wir nun einige konkrete Fälle, die auch für die Schule geeignet sind.

### Feder zwischen zwei Wagen

Auf einer geraden Schiene befinden sich zwei Wagen derselben Masse  $m$ , die zunächst auf der Schiene arretiert seien. Wir führen zweckmäßig ein Koordinatensystem ein, dessen  $x$ -Achse entlang der Schiene verläuft. Zwischen den Wagen sei eine Feder eingespannt, die unter Druckspannung steht (vgl. Abb. 1). Wird die Arretierung der beiden Wagen gelöst, treibt die Spannung der Feder die beiden Wagen symmetrisch auseinander. Was sagt nun die Gleichung (18) dazu?

Integrieren wir dazu diese Gleichung über ein Volumen  $V_L$ , das den linken Wagen genau einschließt. Da die Geschwindigkeit überall im Wagen dieselbe ist, ergibt das Volumenintegral im ersten Term gerade die Änderung des Gesamtimpulses des linken Wagens

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} (\rho v_1) dV = m \dot{v}_1, \quad (19)$$

denn  $v_1$  ist die einzige nicht verschwindende Komponente der Geschwindigkeit des Wagens. Das Integral über die Oberfläche von  $V_L$  verschwindet überall, außer dort, wo die Feder ansetzt. Das Flächenintegral über die Spannung ist gerade die Kraft, die durch die Federspannung gegeben ist,

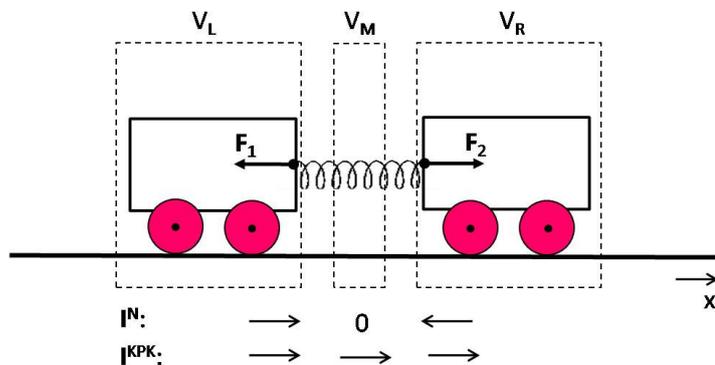


Abb. 1: Eine gespannte Feder beschleunigt zwei Wagen gleicher Masse. Die eingezeichneten Volumina  $V_L$  und  $V_R$  umschließen jeweils den linken und den rechten Wagen, das Volumen  $V_M$  umschließt einen Teil der Feder zwischen den beiden Wagen.

$$F_1 = \sigma_{11} A_1, \quad (20)$$

wobei  $A_1$  die Querschnittsfläche der Feder ist. Das Ergebnis ist, dass der Wagen durch die Spannkraft der Feder beschleunigt wird,

$$m \dot{v}_1 = \sigma_{11} A_1 = k(l - l_0), \quad (21)$$

die hier durch den Spannungstensor der Feder ausgedrückt wird. Würde man die Feder unter Zugspannung setzen, würde sich lediglich das Vorzeichen von  $\sigma_{11}$  ändern. In der konventionellen Ausbildung würde man sofort mit der Gleichung (21) beginnen, wobei die Kraft der Feder aus dem Hooke'schen Gesetz abgeleitet wird.

Betrachten wir nun den Impulsstrom, der durch das mittlere Volumen  $V_M$  fließt, das nur einen Ausschnitt der Feder umschließt. Da wir die Masse der Feder der Einfachheit halber vernachlässigen, trägt hier allein der Spannungsterm in (18) bei. Natürlich ist die Spannung längs der Feder

überall gleich, so dass wir  $\sigma_{11}$  aus dem Integral ziehen können. Es verbleiben die beiden gerichteten Querschnittsflächen der Feder an den beiden längs der  $x$ -Achse gegenüberliegenden Seiten des Volumens  $V_M$ . Die linke Querschnittsfläche zeigt nach links, die rechte nach rechts. Beide heben sich auf: Das Integral verschwindet. Diese Aussage entspricht dem dritten Newton'schen Axiom.

Im Rahmen des KPK wird das in Abb. 1 gezeigte Problem wie folgt behandelt: In der Feder fließt ein Impulsstrom  $\vec{I}^{\text{KPK}}$  durch die Fläche  $d\vec{A} = \vec{n} dA$ , wobei die Flächennormale in Richtung der positiven  $x$ -Achse willkürlich gewählt wird, denn die Symmetrie des Problems zeichnet keine Richtung aus. Damit ergibt sich

$$\vec{I}^{\text{KPK}} = - \int_{A_1} \sigma_{11} dA_1 = -\sigma_{11} A_1 . \quad (22)$$

Im Falle einer Druckspannung ( $l < l_0$ ) fließt  $I^{\text{KPK}}$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse, wie in Abb. 1 gezeigt. Nach den Vorstellungen des KPK beginnt der linke Wagen, sich nach links zu bewegen, weil aus ihm Impuls herausströmt. Dieser fließt in den rechten Wagen, der sich dadurch nach rechts in Bewegung setzt. Der KPK-Impulsstrom wird in diesem Beispiel eingeführt, um die globale Impulserhaltung buchhalterisch zu beschreiben. Er entspricht keinem physikalisch realen (d.h. messbaren) Strom. Diesen kann es schon wegen der Symmetrie des Problems nicht geben. Aber der tiefere Grund ist die Verletzung der lokalen Impulserhaltung durch den KPK-Impulsstrom, die daraus folgt, dass die Impulsstromdichte nicht über geschlossene, sondern über offene Flächen integriert wird. Abbildung 1 zeigt das unterschiedliche Verhalten des KPK-Impulsstroms und des Netto-Impulsstroms.

Unberührt bleibt hier die Frage, ob man diese Darstellung der Beschleunigung eines Wagens durch eine Feder für einfacher hält als die konventionelle, die der Spannkraft der Feder das Produkt aus Masse und Beschleunigung des Wagens gleichsetzt. Hier geht es nur darum zu zeigen, dass die vollkommen korrekte Darstellung der Kontinuumsmechanik z.B. in [1] zu Schlussfolgerungen führt, die der konventionellen Erklärung exakt entsprechen, dem KPK aber widersprechen.

Diese Darstellung ändert sich nur unerheblich, wenn man die Masse der Feder berücksichtigt. Dann fließt natürlich ein Netto-Impulsstrom durch die rechten und linken Seitenflächen des Volumens  $V_M$ , der aber dann durch die Bewegung der Feder gegeben ist. Dann besagt die Gleichung (18), dass die Spannkraft der Feder zum Teil dazu verwendet wird, um der Feder selbst materiellen Impuls zu verleihen. Auch hier wird ein Impulsstrom durch eine Kraft erzeugt.

### Im Joch eingespannte Feder

Beleuchten wir noch einmal im Detail, woher der Widerspruch zwischen dem KPK-Impulsstrom  $\vec{I}^{\text{KPK}}$  und dem physikalischen Netto-Impulsstrom  $\vec{I}^{\text{N}}$  kommt. Dazu betrachten wir die statische Situation einer Spiralfeder, die in ein Joch eingespannt und auf Zug belastet sei, wie in Abb. 2 dargestellt. In der konventionellen Beschreibungsweise übt die Feder eine Kraft  $F_1$  auf das Joch aus, ebenso das Joch eine Kraft  $F_2$  auf die Feder. Die Beträge dieser Kräfte sind gleich groß, ihre Richtungen entgegengesetzt, so dass die Feder in Ruhe bleibt.

In einer physikalisch korrekten, von der Kontinuumsmechanik ausgehenden Beschreibungsweise hätte man beliebige Volumina aus der gezeigten Anordnung herauszugreifen, über deren geschlossene Randflächen die Impulsstromdichte zu integrieren wäre, die durch den Spannungstensor dargestellt wird. Für jedes der beispielhaft in Abb. 2 oben eingezeichneten Volumina ist das Ergebnis dieser Integration gleich Null: Die gegenüberliegenden Flächenelemente zeigen in entgegengesetzte Richtungen, während die an den Flächen anliegenden Spannungen gleich sind.

Im Rahmen des KPK (vgl. dazu Abb. 2 unten) berechnet sich der Impulsstrom, indem man jede der gerichteten Querschnittsflächen mit der Spannung  $\sigma_{11}$  multipliziert. Dieser so berechnete KPK-Impulsstrom verschwindet in der Tat nicht. Seine ausgezeichnete Richtung ergibt sich aus der Festlegung, dass die Richtung der Flächennormalen  $\vec{n}$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse zeigen soll. Wenn aber der KPK-Impulsstrom einen physikalisch realen Impuls transportieren (und nicht nur eine buchhalterische Funktion haben) soll, dann muss er dem Gesetz von der lokalen Impulserhaltung genügen: Der Netto-Impulsstrom, der in jedes beliebig gewählte Volumen hinein- oder aus diesem herausströmt, muss gleich Null sein. Oder anders ausgedrückt: Wenn dem in Abb. 2 eingezeichneten KPK-Impulsstrom eine Kraft entsprechen sollte, wie der KPK behauptet, dann müsste diese innerhalb der Feder wirken und die Glieder der Feder in Bewegung setzen, was nicht der Fall ist, weil das System im Gleichgewicht ist.

### Kommunizierende Röhren

Betrachten wir zur weiteren Verdeutlichung das Beispiel zweier kommunizierender Röhren (vgl. Abb. 3). Zunächst seien beide Enden gleich hoch mit Wasser gefüllt. Wir wählen die  $x$ -Achse so, dass sie parallel zum Verbindungsrohr zwischen den beiden senkrechten Enden verläuft. Wir greifen ein Volumen heraus, das einen Teil dieses Verbindungsrohrs umschließt und dessen rechte und linke Begrenzungsflächen der Einfachheit halber senkrecht auf dem Rohr stehen sollen.

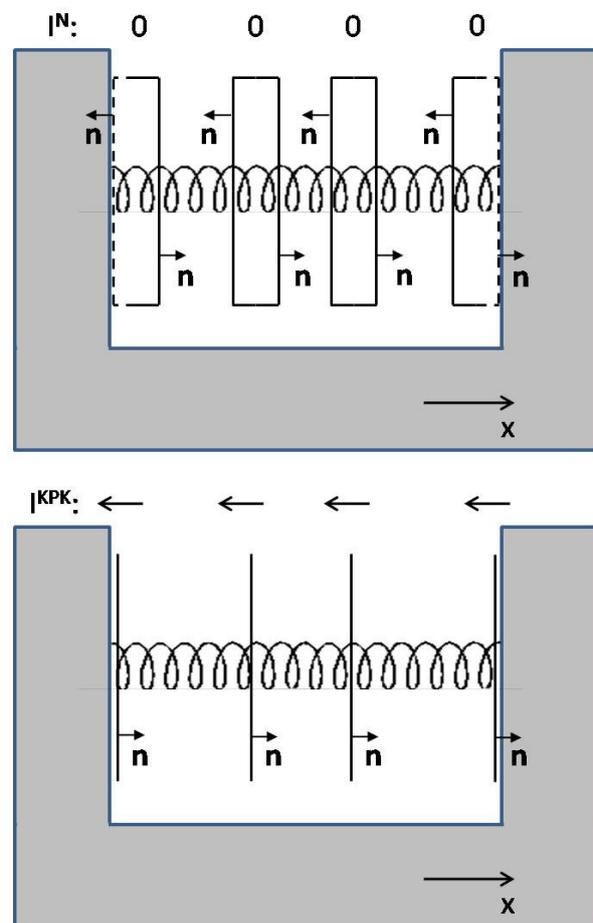


Abb. 2: Eine Spiralfeder ist in ein Joch eingespannt und auf Zug belastet. Oben: Angedeutet ist die physikalisch korrekte Integration der Impulsstromdichte über geschlossene Flächen. Unten: Integriert man stattdessen über offene Flächen, ergibt sich ein Impulsstrom, der aber den Impulserhaltungssatz verletzt.

Die linke Wand des Volumens ist dann längs der negativen  $x$ -Achse, die rechte Wand längs der positiven  $x$ -Achse gerichtet. Der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  wird hier durch den Druck  $P$  dargestellt, der im Rohr herrscht,  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ .

Die Divergenz des Spannungstensors ist dann einfach der negative Gradient des Drucks. Da die kommunizierenden Röhren gleich hoch gefüllt angenommen werden, ist der Druck überall gleich: Der Druckgradient verschwindet, infolgedessen auch die Divergenz des Spannungstensors, und gleichfalls der Impulsstrom durch das Rohr. Wiederum ist damit ausgehend von [1] bewiesen, dass es in dieser statischen Situation keinen Impulsstrom gibt, wohingegen der KPK einen Impulsstrom längs der positiven  $x$ -Achse sieht, da die Flüssigkeit zwischen den kommunizierenden Röhren unter Druckspannung steht.

Gehen wir nun von diesem statischen Beispiel zu einer dynamischen Situation über, indem wir den Wasserpegel im linken Ende über den Wasserpegel im rechten Ende erhöhen. Der Höhenunterschied erzeugt einen Druckgradienten längs des Verbindungsrohrs, der in negativer  $x$ -Richtung zeigt. Die einzige nicht verschwindende Komponente des Spannungstensors ist wiederum  $\sigma_{11} = -P$ , wobei nun der Druck an der linken Wand des Volumens etwas größer als an seiner rechten Wand ist. Das Flächenintegral über  $\sigma_{ij}$  in (18) ergibt daher

$$\int_{A_1} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} dA_j = -\Delta P A_1, \quad (23)$$

wobei  $\Delta P = P_{\text{rechts}} - P_{\text{links}}$  der (negative) Druckunterschied zwischen der rechten und der linken Wand des Volumens  $V_M$  ist. Von den anderen beiden Termen in (18) verschwindet nur der erste nicht,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_M} (\rho v_1) dV = m \dot{v}_1, \quad (24)$$

weil im zweiten die Geschwindigkeit  $v_1$  längs des Rohrs schon wegen der Kontinuitätsgleichung konstant sein muss. In (24) ist  $m$  die von  $V$  umschlossene Masse des Wassers im Rohr. Aus

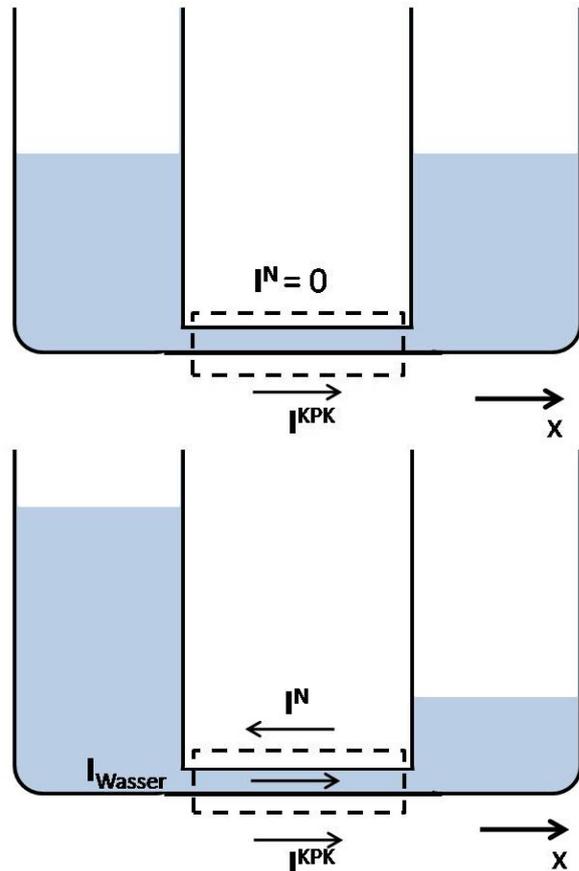


Abb. 3: Kommunizierende Röhren mit gleichen (oben) oder unterschiedlichen Pegelständen. Im oben dargestellten Fall verschwindet der physikalische Impulsstrom, im unten dargestellten Fall zeigt er zum höheren Pegelstand hin, während das Wasser zum niedrigen Pegelstand hin fließt. Der KPK-Impulsstrom dagegen zeigt in beiden Fällen nach rechts.

Gleichung (18) folgt damit

$$m\dot{v}_1 = -\Delta PA_1 . \quad (25)$$

Wiederum besagt diese Gleichung, was wir sofort aus dem zweiten Newton'schen Axiom hätten folgern können: Das Wasser im Volumen  $V_M$  (und damit in jedem beliebigen Teilvolumen des Verbindungsrohrs) wird durch eine Kraft beschleunigt, die sich durch den Druckgradienten ergibt. Diese Kraft ist positiv: Die Flüssigkeit wird nach rechts beschleunigt, zu dem Ende hin, in dem der Wasserpegel niedriger ist. So muss es sein, denn der Höhenunterschied muss ausgeglichen werden, um zu einer stabilen Konfiguration zu gelangen.

Im dynamischen Fall, Abb. 3 unten, betrachten wir drei Ströme: den Wasserstrom, den Netto-Impulsstrom und den KPK-Impulsstrom. Die Richtungen von  $\vec{I}_{\text{Wasser}}$  und  $\vec{I}^N$  müssen immer entgegengesetzt gerichtet sein, weil die Kraft  $\vec{F}$ , die auf das Wasser wirkt, gleich  $-\vec{I}^N$  ist. Anders ausgedrückt, muss wegen der lokalen Impulserhaltung der aus dem Druckgradienten berechnete Netto-Impulsstrom  $\vec{I}^N$  zusammen mit dem materiellen Impulsstrom des Wassers gleich Null ergeben. In unserem Beispiel ist dagegen der KPK-Impulsstrom in Richtung des fließenden Wassers gerichtet. Man könnte deshalb vermuten, dass  $\vec{I}^{\text{KPK}}$  den Impulsstrom des fließenden Wassers beschreibt. Das ist jedoch falsch, denn  $\vec{I}^{\text{KPK}}$  zeigt weiter in diese Richtung, auch wenn gar kein Wasser fließt (vgl. Abb. 3 oben). Selbst wenn man den Druckgradienten umkehrt, indem man die beiden Füllgefäße austauscht und damit die tatsächliche Fließrichtung umkehrt, bleibt die Richtung von  $\vec{I}^{\text{KPK}}$  unverändert, weil  $\vec{I}^{\text{KPK}}$  proportional zum Druck und nicht zum Druckgradienten ist. Auch dies ist wieder eine unmittelbare Folge davon, dass  $\vec{I}^{\text{KPK}}$  durch Integration der Impulsstromdichte über eine offene statt über eine geschlossene Fläche erhalten wird.

### Schlussbemerkungen zu Impulsströmen in der Mechanik

Die vorangehenden Beispiele zeigen, wie eine physikalische Beschreibung mechanischer Vorgänge anhand von Impulsströmen entwickelt werden kann. Sie beginnt mit der Kontinuitätsgleichung (15) für die Impulsdichte, die über geeignete Volumina integriert wird. Sie kann als lokale Erhaltungsgleichung des Impulses interpretiert werden. Wird diese Integration korrekt ausgeführt, ergibt sich, dass in statischen Situationen kein physikalischer Impulsstrom existiert. Der KPK-Impulsstrom tritt dennoch auf, weil der KPK die Impulsstromdichte über offene Flächen integriert. Deshalb verletzt der KPK-Impulsstrom den lokalen Impulserhaltungssatz.

Während bei einer korrekten physikalischen Beschreibung Flächenelemente längs ihrer äußeren Flächennormalen orientiert sind, die unabhängig vom Koordinatensystem definiert sind, legt der KPK die willkürlich gewählte positive  $x$ -Achse als Richtung fest. Daraus ergeben sich die fehlerhaften Transformationseigenschaften des KPK-Impulsstroms unter Koordinatendrehungen.

Selbst wenn die Mechanik mithilfe von Impulsstromdichten und Impulsströmen korrekt aufgebaut wird – was möglich ist –, bleibt die Frage, ob die hier in Beispielen gezeigten Betrachtungen tatsächlich als einfacher anzusehen wären als die Beschreibung anhand der Newton'schen Mechanik. In solchen Situationen, in denen die Impulsstromdichte zum Teil oder ganz durch innere Spannungen erzeugt wird, bleibt der Impulsstrom abstrakt, weil mit ihm kein materielles Medium fließt.

## Abschnitt II: Elektrodynamik

### Elektrische und magnetische Ladungen

Bis jetzt sind keine Experimente im Bereich der klassischen (Nichtquanten-) Elektrodynamik bekannt, die nicht von den Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (26) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (29)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (27) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (30)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (28) \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (31)$$

unter Berücksichtigung der Materialgleichungen beschrieben werden, die wir hier in differentieller Form und im SI-System wiedergeben.

Aus den Maxwellgleichungen folgt, dass die elektrischen Ladungsdichten  $\rho$  die Quellen der dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  sind (30). Im Vakuum stimmt die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  bis auf einen Faktor  $\varepsilon_0$  mit dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  überein. In Materie unterscheiden sich die beiden Terme noch um die Polarisation  $\vec{P}$ , die der Dichte der in der Materie induzierten elektrischen Dipole entspricht (28).

In den Maxwellgleichungen treten explizit keine magnetischen Ladungsdichten auf, die mit dem Symbol  $\rho_m$  bezeichnet werden könnten, ebenso wenig wie magnetische Monopole. Dies stimmt mit der Tatsache überein, dass bis jetzt trotz intensiver Bemühungen keine isolierten magnetischen Ladungen gefunden wurden (mit einer Fehlerabschätzung  $\rho_m/\rho < 10^{-20}$ ). Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  (29) können die Linien des  $\vec{B}$ -Feldes, das auch als magnetische Induktion bezeichnet wird, nicht enden. Im Vakuum stimmen  $\vec{B}$ - und  $\vec{H}$ -Feld bis auf den Faktor  $\mu_0^{-1}$  überein. In Materie unterscheiden sie sich noch um den Beitrag der Magnetisierung  $\vec{M}$  (31). Die Magnetisierung  $\vec{M}$  ist die Dichte magnetischer *Dipole* in der Materie.

Historisch sei angemerkt, dass magnetische Phänomene ebenso lange wie elektrische untersucht wurden. Doch erst zwischen 1819 und 1825 wurde der Zusammenhang von magnetischen Eigenschaften und elektrischen Strömen erkannt und detailliert untersucht (durch Oersted, Biot, Savart und Ampère). Erst im Jahre 1864 wurde mit den Maxwell'schen Gleichungen der volle Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Eigenschaften hergestellt. In diesen Gleichungen ist der entscheidende Unterschied zwischen elektrischen und magnetischen Phänomenen enthalten: Elektrische Ladungen treten unabhängig voneinander als positive und negative Ladungen auf, während in magnetischen Phänomenen bisher nie separate einzelne Ladungen gefunden wurden [2, S. 168]. Immer treten Nord- und Südpole paarweise auf und werden als Dipole bezeichnet.

### Beispiele

Wir wollen im Folgenden drei Beispiele betrachten, um den fundamentalen Unterschied zwischen elektrischen Ladungsdichten und der Magnetisierung zu verdeutlichen.

Aus der Maxwellgleichung (29) folgt mit der Materialgleichung (31)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (32)$$

Diese Gleichung zeigt unmittelbar, dass die Quellen des  $\vec{H}$ -Feldes durch die Änderungen der Dipoldichte  $\vec{M}$  gegeben sind. Bei einem langen, dünnen Stabmagnet kann man  $\vec{M}$  im Inneren als praktisch konstant ansehen, während die Magnetisierung an den Stirn- und Seitenflächen von  $\vec{M}$  im Inneren auf Null im Äußeren springt. Bildet man die Divergenz von  $\vec{M}$ , entsteht durch diesen Sprung an den Stirnflächen des Stabmagneten (näherungsweise) eine  $\delta$ -Funktion mit der Amplitude  $|\vec{M}|$ . An den Seitenflächen gibt es trotz des Sprungs keinen Beitrag, da  $\vec{M}$  in Sprungrichtung keine Komponente hat. Somit sind die Quellen des  $\vec{H}$ -Feldes auf die Stabenden konzentriert und erzeugen dadurch magnetische  $H$ -Feldlinien so, als ob dort „magnetische Ladungen“ säßen.

Allgemein gilt, dass auf der rechten Seite der Gleichung (32) für die Quellen des  $H$ -Feldes die Divergenz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$  der Magnetisierung auftritt. Diese Größe wird in der Literatur [2, S. 193] gelegentlich mit  $-\rho_m$  abgekürzt und auch als „magnetische Ladungsdichte“ bezeichnet. Wie das obige Beispiel belegt, sind diese „magnetischen Ladungen“ aber keine isolierbaren Ladungen, weil die Magnetisierung  $\vec{M}$  aus nicht zerlegbaren Dipolen aufgebaut ist.

Aus den Gleichungen (27) und (31) lässt sich eine Gleichung für  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  herleiten, die die Größe  $\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$  enthält. Diese Größe wird gelegentlich als Magnetisierungsstrom  $\vec{j}_m$  bezeichnet. Wieder ist es die Magnetisierung, genauer deren Rotation, die einer formalen Analogie mit einem „Strom“ zugrunde liegt, keinesfalls aber eine magnetische Ladung.

Schließlich lässt sich in dem speziellen Fall verschwindender elektrischer Ströme und verschwindender zeitlicher Ableitungen (Stationarität) aus den Gleichungen (27) und (32) eine Poissongleichung für ein magnetisches Potential  $\phi_m$  mit  $\vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_m$  herleiten. Auch in dieser Gleichung tritt als Inhomogenität die Magnetisierung  $\vec{M}$  auf, genauer deren Divergenz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ , in Übereinstimmung mit oben, aber damit gerade keine magnetischen Ladungen, sondern die magnetische Dipoldichte.

## Schlussbemerkungen zur Elektrodynamik

Diese Beispiele zeigen, dass bezüglich der magnetischen Eigenschaften die wesentlichen Größen, die in den Maxwellgleichungen und den daraus abgeleiteten Gleichungen auftreten, die Magnetisierung und ihre räumlichen Änderungen bzw. ihr Sprung an einer Grenzfläche sind. Die Magnetisierung beschreibt die Dichte von magnetischen *Dipolen* und keineswegs die von magnetischen Ladungen. Es ist deshalb nicht angebracht, im Zusammenhang mit räumlichen Änderungen der Magnetisierung von magnetischen Ladungsdichten zu sprechen, denen eine messbare Realität zukäme. Selbst der Begriff „magnetische Sprungladungen“ kann noch falsche Assoziationen wecken.

Diese zusammenfassende Darstellung lässt sich dahingehend weiterführen, dass in der Lorentz-invarianten, vierdimensionalen Form der Maxwellgleichungen, die gegenwärtig experimentell sehr gut gesichert ist, magnetische Ladungen allein keinen Platz hätten. Die Inhomogenität und Quelle für die elektromagnetischen Felder wird durch den Vierervektor aus elektrischer Stromdichte und elektrischer Ladungsdichte vollständig beschrieben. Wenn magnetische

Ladungen experimentell gefunden werden, müssen die Lorentz-invarianten Gleichungen erweitert werden; dann aber nicht nur um eine magnetische Ladungsdichte, sondern auch um eine magnetische Stromdichte, also um einen magnetischen Viererstrom.

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben die bekannten Phänomene der Elektrodynamik sehr gut. Bisher besteht keinerlei Notwendigkeit, eine „magnetische Ladungsdichte“ als zusätzliche Größe einzuführen. Alle bekannten magnetostatischen Eigenschaften können mit Hilfe von elektrischen Strömen sowie mit der Magnetisierung und ihrer räumlichen Änderung beschrieben werden. Dennoch werden in dem KPK-Lehrbuch für die Sekundarstufe II [5, S. 41] magnetische Ladungen eingeführt, um – vermutlich in analoger Weise wie in der Elektrostatik elektrische Phänomene – magnetostatische Phänomene damit zu beschreiben. Es wird nicht gesagt, dass bisher kein experimenteller Beweis für diese Ladungen gefunden wurde. Als Einschränkung wird verwendet, dass der Betrag von positiven (Nordpol) und negativen (Südpol) Ladungen gleich sei. In dem Schulbuch [5] wird auch nicht erwähnt, dass diese Gleichheit der positiven und negativen Ladungen unabhängig von der Teilchengröße gelten müsste.

Der Begriff eines Dipols bzw. einer magnetischen Dipoldichte, der die messbaren Verhältnisse stattdessen richtig wiedergeben würde und schon in der Elektrostatik eingeführt werden kann, wird nicht verwendet. Dies erstaunt umso mehr, als in den zugehörigen Unterrichtshilfen [6, S. 15] klar gesagt wird, dass magnetische Monopole nicht existieren. Allerdings wird in [6] dann versucht, magnetische Ladung von Teilchen zu trennen. Korrekt durchgeführt, mag dies eine interessante Idee sein, hat aber mit der Analogie zu elektrisch geladenen Teilchen nichts zu tun. Bei diesen ist die Ladung eine Eigenschaft der Teilchen. Auch bei den magnetischen Eigenschaften ist der Ursprung völlig klar: sie werden von magnetischen Dipolen und – wie oben im Detail beschrieben – von elektrischen Strömen verursacht.

Abschließend soll noch die in Nature [7], Science [8] und anderen Zeitschriften [9, als Beispiel] vermeldete Entdeckung von magnetischen Monopolen gestreift werden. Dabei handelt es sich nicht um magnetische Ladungseinheiten im Sinne von Dirac, sondern um Quasiteilchen (emergente Zustände), die sich auf Dipole zurückführen lassen.

## Literatur

- [1] Falk, G.: „Physik: Zahl und Realität“. Basel, Birkhäuser (1990)
- [2] Jackson, J. D.: „Classical Electrodynamics“. JohnWiley & Sons (1975)
- [3] Herrmann, F., Schmid, G. B.: „Statics in the momentum current picture“. American Journal of Physics 52 (2), 146 (1984)
- [4] Herrmann, F.: „Der Karlsruher Physikkurs. Ein Lehrbuch für den Unterricht in der Sekundarstufe II. Mechanik“. 2. Auflage, Aulis-Verlag (2010)
- [5] Herrmann, F.: „Der Karlsruher Physikkurs. Ein Lehrbuch für den Unterricht in der Sekundarstufe II. Elektrodynamik“. 6. Auflage, Aulis-Verlag (2010)
- [6] Herrmann, F.: „Der Karlsruher Physikkurs. Ein Lehrbuch für den Unterricht in der Sekundarstufe I. Elektrodynamik – Unterrichtshilfen“. 4. Auflage, Aulis-Verlag (2008)

- [7] Castelnovo, C., Moessner, R., Sondhi, S. L.: „Magnetic Monopoles in Spin Ice“. Nature 451, 42 (2008)
- [8] Morris, D. J. P., Tennant, D. A., Grigera, S. A., Klemke, B. et al.: „Dirac Strings and Magnetic Monopoles in the Spin Ice  $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ “. Science 326, 411 (2009)
- [9] Vojta, M.: „Frustriert zum Monopol“. Physik Journal 8 Nr. 11, 22 (2009)