Wie eine ungeschickt gestellte Frage ungelegene Antworten verursacht, am Beispiel der erzwungenen Schwingungen

Friedrich Herrmann, Holger Hauptmann

Abteilung für Didaktik der Physik, Universität, 76128 Karlsruhe

Kurzfassung
Es wird gezeigt, dass die mechanische Resonanz auf Grund einer ungeschickt gestellten Ausgangsfrage als ein Vorgang erscheint, dessen Ablauf der natürlichen Erwartung in verschiedener Hinsicht widerspricht. Die unpassende Frage lautet: "Wie reagiert die Ortsamplitude des Schwingers auf eine harmonische Erregerkraft?"
Die Diskussion des Resonanzphänomens wird stimmiger, wenn man die Frage so stellt: "Wie hängt die Energiedissipation des Schwingers von der Frequenz der Erregerkraft ab?"
Das Maximum der Resonanzkurve liegt dann an der richtigen Stelle, nämlich bei der Eigenfrequenz des Schwingers, und die Kurve sagt uns, dass das erregte System sowohl für $f = 0$ als auch für $f \to \infty$ gar nicht schwingt.

1. Einleitung

Im Verlauf der Behandlung von mechanischen Schwingungsvorgängen interessiert man sich dafür, wie ein schwingungsfähiges System reagiert, wenn man es sinusförmig erregt. Man formuliert etwa die folgende Frage:

"Wie reagiert die Amplitude des schwingenden Körpers, wenn man die Frequenz einer zusätzlichen, harmonischen Kraft verändert?"

Unter "Amplitude" versteht man dabei die Ortsamplitude. In schematischer Form ist das betrachtete System in Abb. 1 dargestellt.

Die Fragestellung scheint plausibel. Man fragt nach dem Zusammenhang zwischen einer *Ursache*, der Kraft, und einer *Wirkung*, der Bewegung des Schwingers, für welche die Ortsamplitude ein Maß ist.

Als Ergebnis ergibt sich bekanntlich:

Das System schwingt sinusförmig, und zwar mit derselben Frequenz wie der Erreger. Die Ortsamplitude x_0 hat als Funktion der Erregerfrequenz f einen Verlauf wie es Abb. 2a zeigt. Das wichtigste daran ist, dass $x_0(f)$ ein deutliches Maximum hat – wenigstens, solange die Dämpfung nicht zu groß ist. Für hohe Frequenzen geht sie gegen null, für niedrige gegen einen von null verschiedenen Wert. Das Maximum liegt ungefähr, aber nicht genau, bei der Eigenfrequenz f_0 des Schwingers. Zwischen der erregenden Kraft und dem Ort des Schwingers besteht eine Phasenverschiebung α, die ebenfalls von der Erregerfrequenz abhängt, Abb. 2b. Bei der Eigenfrequenz ist sie gleich $\pi/2$.

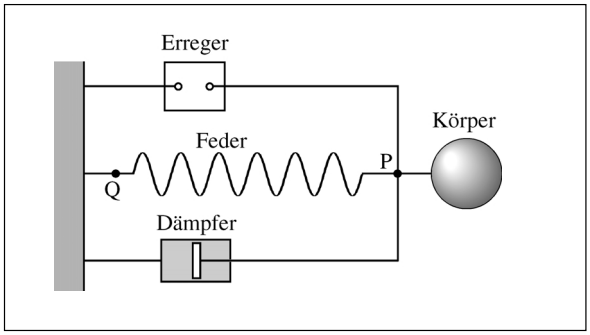

Abb. 1: Schematische Darstellung einer Anordnung zur Untersuchung von erzwungen Schwingungen. Die Energiequelle (der "Erreger") liefert eine sinusförmige Kraft mit konstanter Amplitude. Man beobachtet die Ortsamplitude des schwingenden Körpers als Funktion der Frequenz der Erregerkraft.

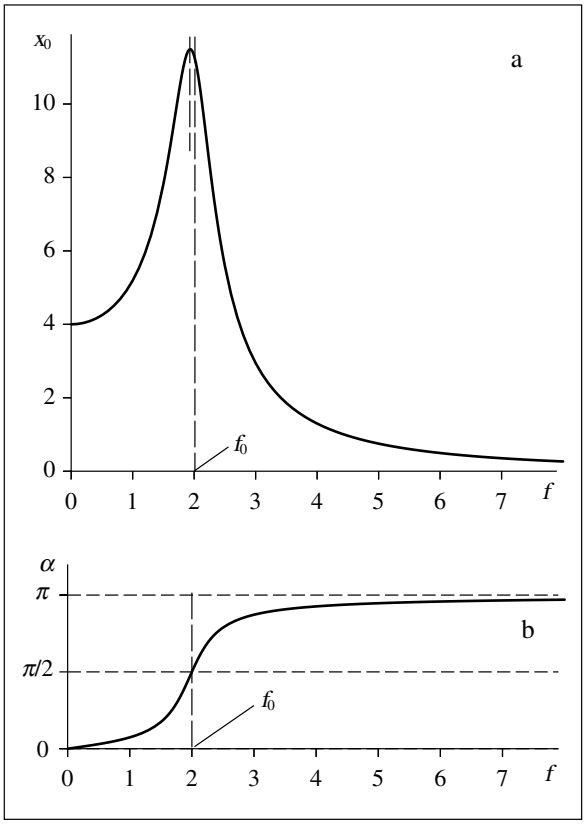

Abb. 2: Resonanzkurve in traditioneller Darstellung. (a) Die Ortsamplitude des Schwingers über der Frequenz bei konstanter Kraftamplitude der Erregerkraft. (b) Die Phasenverschiebung zwischen Ort des Schwingers und Kraft des Erregers.

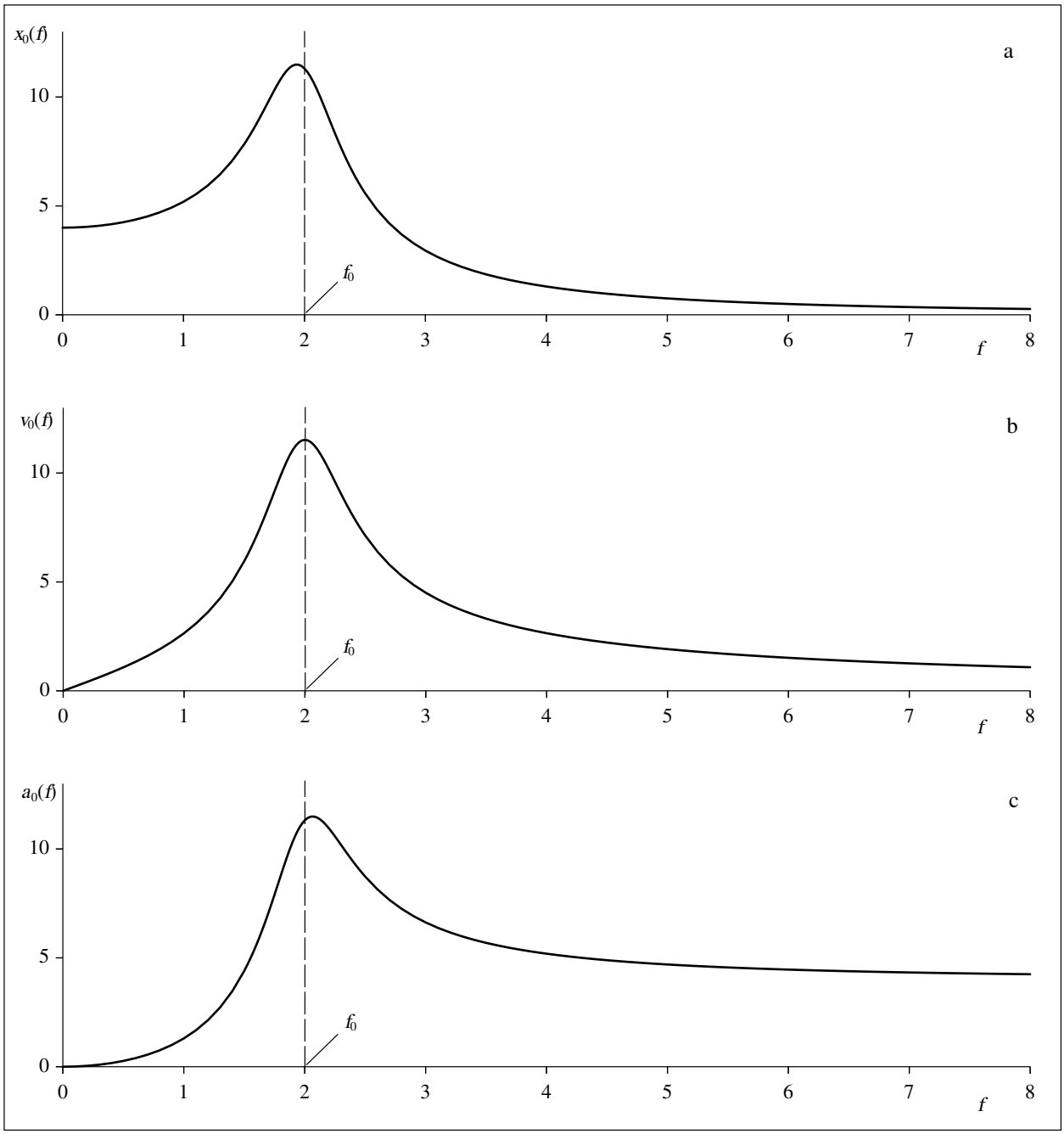

Abb. 3: Ortsamplitude (a), Geschwindigkeitsamplitude (b) und Beschleunigungsamplitude(c) als Funktion der Erregerfrequenz.

Wir Lehrer sind so daran gewöhnt, die Erscheinung der Resonanz auf diese Art zu behandeln, dass es uns gar nicht in den Sinn kommt, das Vorgehen in Frage zu stellen. Tatsächlich gibt es aber Gründe, nach Alternativen Ausschau zu halten. Wir möchten im Folgenden zeigen, dass man, wenn man so verfährt wie gerade skizziert, von einer ungeschickt gestellten Frage ausgeht.

Wir stellen zunächst in Abschnitt 2 fest, dass die Frage, so wie sie oben formuliert wurde, ungelegene Antworten zur Folge hat. Außerdem zeigen wir, dass es zahlreiche Möglichkeiten gibt, die Ausgangsfrage anders zu stellen. In Abschnitt 3 wird begründet, warum es geschickter ist, nach der im Schwinger dissipierten Energie als Funktion der Erregerfrequenz zu fragen, statt nach der Ortsamplitude. In Abschnitt 4 wird gezeigt, wie man die dissipierte Energie über die Messung der Geschwindigkeitsamplitude des schwingenden Körpers erhält. Wie es zu der unpassenden Wahl der beobachteten Größe kam, wird in Abschnitt 5 diskutiert.

2. Wie eine ungeschickt gestellte Frage eine ungelegene Antwort verursacht

Wer mit dem Funktionsgraphen von Abb. 2 zum ersten Mal konfrontiert ist, wird ein gewisses Unbehagen empfinden. Die Funktion bringt nicht genau das zum Ausdruck, was man eigentlich gern zum Ausdruck gebracht hätte.

So liegt das Maximum der "Resonanzkurve" von Abb. 2a nicht dort, wo man es eigentlich gern hätte, nämlich bei der Eigenfrequenz f_0. Außerdem scheint Abb. 2a zu behaupten, der Schwinger schwinge auch bei $f = 0$. Was die Kurve von Abb. 2b betrifft, so ist nicht klar zu erkennen, welche Einsicht sie vermitteln soll.

Bedeutet das, dass die Resonanz doch nicht ein so einfacher Vorgang ist, wie man es vielleicht erwartet hatte? Wir wollen zeigen, dass die Unstimmigkeiten von Abb. 2 nichts anderes sind als Artefakte, für die nur die willkürliche und unbedachte Wahl der untersuchten Größen, nämlich x_0 und α verantwortlich ist.

Wir müssen uns zunächst klar machen, dass man statt x_0 und α noch mehrere andere Größen als Funktion der Erregerfrequenz hätte auftragen können. So könnte man etwa fragen nach der Geschwindigkeitsamplitude des schwingenden Körpers oder nach seiner Beschleunigungsamplitude. Man könnte auch der Meinung sein, es sei interessant, die Amplitude des Impulses des schwingenden Körpers, oder die der wirkenden Kräfte zu untersuchen: der Kraft, die auf den schwingenden Körper wirkt, der Kraft, die die Feder auf den Knotenpunkt P ausübt oder der Kraft, die der Dämpfer auf den Knoten P ausübt. Wenn man an Energien interessiert ist, würde man nicht nach Amplituden, sondern nach zeitlichen Mittelwerten als Funktion der Erregerfrequenz fragen: nach dem Mittelwert der kinetischen Energie des Körpers, nach dem Mittelwert der in der Feder gespeicherten Energie, nach dem Mittelwert der Gesamtenergie oder nach dem Mittelwert des Energiestroms in den Dämpfer hinein. Eine weitere Klasse von Größen die sich zur Darstellung anbieten, sind Phasendifferenzen. So könnte man die Phasendifferenz zwischen Erregerkraftfunktion und Ortsfunktion des Schwingers, zwischen Erregerkraft und Geschwindigkeit oder zwischen Ortsfunktion und Dämpfungskraft untersuchen.

Nun zeigen zwar einige der aufgezählten Funktionen den gleichen Verlauf, sodass man es doch nicht mit ganz so vielen Funktionen zu tun hat, wie man nach unserer Aufzählung befürchten könnte. Es sind aber doch so viele, dass man eine Auswahl treffen muss. Um uns ein Gefühl für die Unterschiede zu verschaffen, wollen wir drei von ihnen miteinander vergleichen. Abb. 3 zeigt die Graphen der Funktionen $x_0(f)$, $v_0(f)$ und $a_0(f)$, also der Orts-, der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsamplitude des schwingenden Körpers als Funktion der Erregerfrequenz f. Man erhält die Funktion $v_0(f)$ aus $x_0(f)$ einfach durch Multiplikation mit $2\pi f$ und $a_0(f)$ durch nochmalige Multiplikation mit diesem Faktor. Beim Vergleich der Graphen fällt dreierlei auf:

1. Die Maxima liegen nicht an derselben Stelle. Das von $x_0(f)$ liegt links von der Eigenfrequenz, das von $a_0(f)$ rechts davon. Nur das Maximum der Funktion $v_0(f)$ liegt genau bei der Eigenfrequenz.

2. Für $f = 0$ ist die Ortsamplitude ungleich null, während die Geschwindigkeits- und die Beschleunigungsamplitude null sind.

3. Für $f \to \infty$ geht die Beschleunigungsamplitude gegen einen von null verschiedenen Wert, während Orts- und Geschwindigkeitsamplitude gegen null gehen.

Man sieht: Nur $v_0(f)$ verhält sich so wie man es sich von einer Resonanzkurve wünscht. Nur diese Kurve scheint uns zu sagen: Für $f = f_0$ reagiert der Schwinger maximal, für $f = 0$ und $f \to \infty$ reagiert er gar nicht. Den Grund dafür, dass sich gerade die Geschwindigkeitsamplitude so verhält, diskutieren wir in Abschnitt 4.

Wir wollen nun zu unserer zentralen Frage zurückkommen: Welche Größen sollte man als Funktion der Erregerfrequenz untersuchen? Am liebsten wäre es uns, wenn man sich auf die Untersuchung einer einzigen Größe beschränken und dabei das Wesentliche der Resonanz erfassen könnte. Wir werden im folgenden Abschnitt zeigen, dass das in der Tat möglich ist[1].

3. Die Energiedissipation als Maß für die Reaktion des Schwingers auf eine harmonische Erregung

Die Variablen, die wir im vorangehenden Abschnitt genannt haben, sind Variablen eines ganz bestimmten mechanischen Schwingers, nämlich des Schwingers, der in Abb. 1 skizziert ist. Nun gibt es aber noch zahlreiche andere Schwingertypen, an denen noch weitere Variablen auftreten. Wenn man eine so allgemeine Erscheinung wie die der Resonanz charakterisieren will, so ist es sicher angebracht, nach einer Größe zu suchen, die einerseits für die Resonanz typisch ist, andererseits aber bei allen Schwingertypen auftritt. Gehen wir die oben genannten Funktionen durch, so entdecken wir tatsächlich einen geeigneten Kandidaten: die pro Zeit im Mittel absorbierte Energie[2]. Wenn wir diese Größe in den Mittelpunkt unserer Betrachtung stellen, so liegt es nahe, die Erscheinung der Resonanz so zu erklären:

Resonanz bedeutet, dass ein System, das harmonisch erregt wird, bei seiner Eigenfrequenz besonders viel Energie absorbiert.

Da wir nur stationäre Zustände betrachten (d.h. der Einschwingvorgang ist beendet), wird die ganze absorbierte Energie zur Entropieproduktion verwendet. Sie wird, wie man sagt, *dissipiert*. Wir können daher unsere Definition des Resonanzphänomens auch so formulieren:

Resonanz bedeutet, dass ein System, das harmonisch erregt wird, bei seiner Eigenfrequenz besonders viel Energie dissipiert.

Diese Aussage gilt nicht nur für das Pendel, den Federschwinger, den Drehschwinger, die schwingende Flüssigkeitssäule, sondern auch für die verschiedenen Typen elektrischer Schwingkreise. Die Aussage, dass die Energiedissipation oder -absorption bei der Eigenfrequenz ein Maximum hat, ist offenbar von allgemeinerer Natur, als die, dass die Ortsamplitude dicht neben der Eigenfrequenz ein Maximum hat.

Den Funktionsgraphen der mittleren dissipierten Energie als Funktion der Erregerfrequenz zeigt Abb. 4 für drei

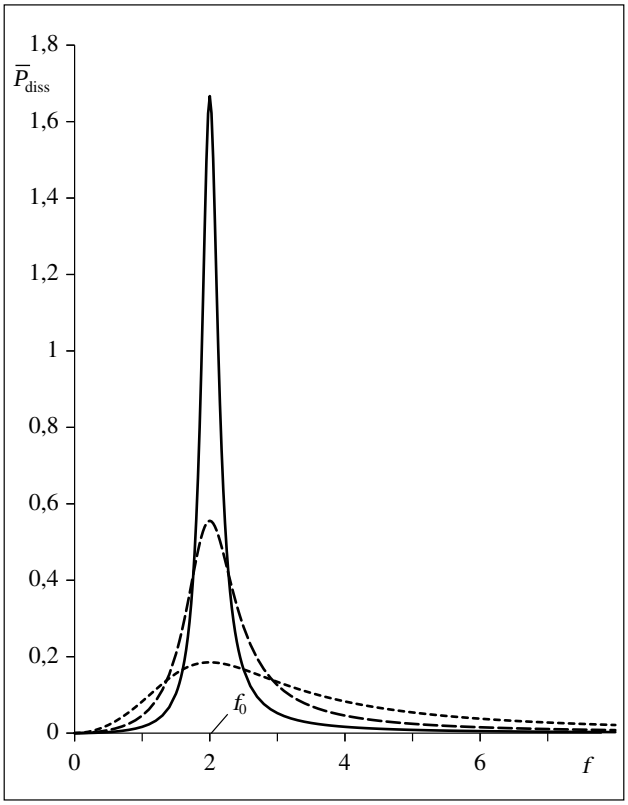

Abb: 4. Die im Zeitmittel dissipierte Energie als Funktion der Erregerfrequenz für drei verschiedene Dämpfungen. Die Dämpfungskonstanten unterscheiden sich von einer Kurve zur nächsten um den Faktor drei. Die Kurven verhalten sich so, wie man es von Resonanzkurven erwartet:

- Das Maximum liegt bei der Eigenfrequenz des Schwingers.
- Die Funktionen gehen gegen null sowohl für $f \to 0$ als auch für $f \to \infty$.
- Je geringer die Dämpfung ist, desto später kündigt sich die Resonanzstelle an, wenn man sich ihr von kleinen oder großen Frequenzen her nähert.

verschiedene Dämpfungen. Die Funktionen verhalten sich so wie man er von Resonanzfunktionen erwartet:

- Das Maximum liegt bei der Eigenfrequenz.
- Die Funktionswerte werden null sowohl für $f = 0$ als auch für $f \to \infty$.
- Je stärker die Dämpfung ist, desto niedriger ist das Maximum.
- Je stärker die Dämpfung ist, desto früher kündigt sich die Resonanzstelle an, wenn man sich von kleineren oder größeren Frequenzen her der Eigenfrequenz nähert.

Dass die Wahl der (Energie-)Absorption als Maß für die Reaktion des Systems ein natürliches Maß ist, wird auch dadurch gestützt, dass man die Erscheinung der Resonanz in einem anderen Zusammenhang ohne zu zögern ausschließlich mit dieser Größe beschreibt: wenn man die optische Absorption untersucht. In Absorptionsspektren wählt man als Ordinate durchweg die pro Zeit (und pro Frequenzintervall) absorbierte und damit dissipierte Energie.

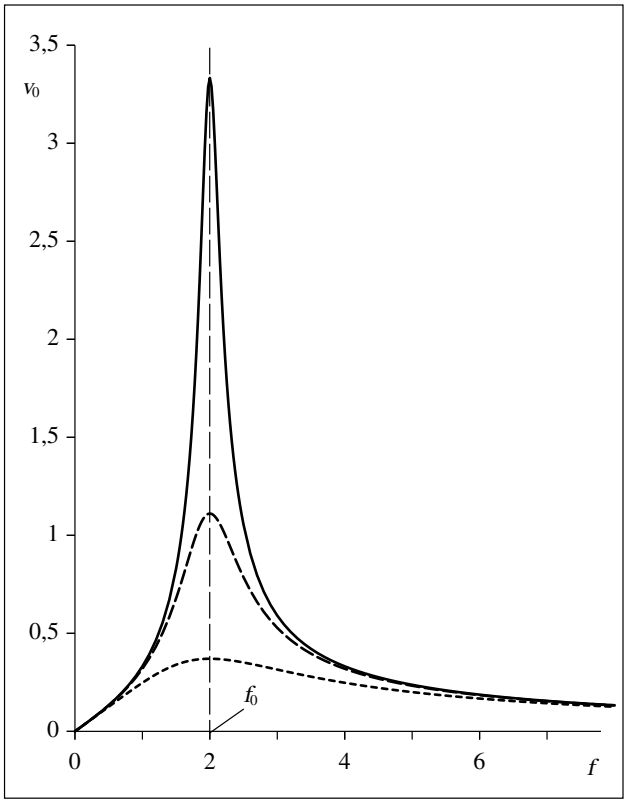

Abb. 5: Die Geschwindigkeitsamplitude als Funktion der Erregerfrequenz für drei verschiedene Dämpfungen. Die Dämpfungskonstanten unterscheiden sich von einer Kurve zur nächsten um den Faktor drei.

4. Zur Messung der Energiedissipation

Für mechanische Energieströme haben wir kein direktes Messgerät. Man muss sie sich daher aus anderen, leichter messbaren Größen beschaffen. Die im Dämpfer pro Zeit dissipierte Energie bekommt man aus:

$P_{\text{diss}} = \Delta v \cdot F$

Wo Δv die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den beiden Befestigungen des Dämpfers (Ein- und Ausgang für den Impulsstrom) ist und F die Kraft, die im Dämpfer wirkt (der Impulsstrom, der durch ihn hindurchfließt). Da sich das eine Ende des Dämpfers bei uns nicht bewegt, können wir auch schreiben:

$P_{\text{diss}} = v \cdot F.$

Hier ist v die Geschwindigkeit desjenigen Endes des Dämpfers, das sich bewegt, in Abb. 1 also des rechten Endes. Da sich dieses Ende genau so bewegt, wie der schwingende Körper, ist v gleichzeitig die Geschwindigkeit dieses Körpers.

Da man grundsätzlich die Reibungskraft als proportional zu v annimmt (andernfalls würde der Schwinger gar keine harmonische Bewegung machen), also

$F = k \cdot v$

ergibt sich für die pro Zeit dissipierte Energie

$P_{\text{diss}} = k \cdot v^2,$

und deren Mittelwert[3, 4]

$$\overline{P}_{\text{diss}} = k \cdot \overline{v^2} = k \cdot \frac{{v_0}^2}{2}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir die im Mittel dissipierte Energie aus der Geschwindigkeitsamplitude des schwingenden Körper berechnen. Es genügt also, die Geschwindigkeitsamplitude als Funktion der Erregerfrequenz zu messen.

Man kann nun auch verstehen, warum die Geschwindigkeitsamplitude für $f = f_0$, $f = 0$ und $f \to \infty$ das "richtige" Verhalten zeigt, Abb. 5. Dort wo $v_0(f)$ ein Maximum hat, hat auch das Quadrat dieser Funktion ein Maximum. Und dort wo $v_0(f)$ den Wert null annimmt, ist auch das Quadrat null. Das Maximum der Funktion $\overline{P}_{\text{diss}}(f)$ ist allerdings schärfer als das von $v_0(f)$. Man sieht: Als Notlösung ist die Untersuchung der Funktion $v_0(f)$ noch besser, als die der Ortsamplitude.

5. Vermutungen über die Entstehung der ungeeigneten Methode

Wir haben uns überzeugt, dass die Energiedissipation ein besseres Maß ist als die Ortsamplitude, wenn es darum geht, die Erscheinung der Resonanz zu charakterisieren. Wie konnte es aber dazu kommen, dass die Ortsamplitude so beliebt wurde? Zwei Dinge mögen als Ursache wirksam geworden sein.

1. Die Gewohnheit, die Resonanz mit Hilfe eines Diagramms der Art von Abb. 2 zu illustrieren, hat sich etabliert zu einer Zeit, als es nicht so selbstverständlich war wie heute, die Größe Energie zur Beschreibung mechanischer Phänomene heranzuziehen, ganz zu schweigen von der Entropie. Die Energiedissipation in einem mechanischen System nennt man bekanntlich Reibung, und Reibung war etwas, das man sich tunlichst wegzudenken hatte.

2. Selbstverständlich wollte man die Resonanz, zunächst in den Vorlesungen der Universität, aber dann auch im Schulklassenzimmer, im Demonstrationsexperiment zeigen und eine "Resonanzkurve" ausmessen. Für eine qualitative Beobachtung und für eine Messung kam früher nur die Ortsamplitude in Frage. Man sieht auch, warum daneben ausgerechnet die Phasendifferenz zwischen Erregerkraft und Schwingerortsamplitude untersucht wird: Auch sie lässt sich relativ leicht beobachten. Da wir heute Sensoren und Messgeräte für die verschiedensten anderen Größen haben, die auch noch bequem zu handhaben sind, sind wir diesen Einschränkungen nicht mehr unterworfen.

6. Schlussfolgerung

Wir haben versucht zu zeigen, dass das zweifellos wichtige Phänomen der Resonanz auf Grund einer ungeschickt gestellten Ausgangsfrage als ein Vorgang erscheint, dessen Ablauf der natürlichen Erwartung in verschiedener Hinsicht widerspricht. Die unpassende Frage lautet:

"Wie reagiert die Ortsamplitude des Schwingers auf eine harmonische Erregerkraft?"

Die Diskussion des Resonanzphänomens wird stimmiger, wenn man die Frage etwa so stellt:

"Wie hängt die Energiedissipation des Schwingers von der Erregerfrequenz ab?"

Das Maximum der "Resonanzkurve", die man so erhält, liegt an der erwarteten Stelle, nämlich bei der Eigenfrequenz des Schwingers, und die Kurve sagt uns, dass das erregte System sowohl für $f = 0$ als auch für $f \to \infty$ gar nicht mehr schwingt. Als Notlösung kann man auch die Geschwindigkeitsamplitude zum Gegenstand der Betrachtung machen, denn die im Mittel dissipierte Energie ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeitsamplitude.

[1] Wir haben hier unterstellt, dass die Amplitude der Erregerkraft konstant gehalten wird. Auch dies ist nur eine von mehreren Möglichkeiten. Statt der Kraftamplitude könnte man auch eine Orts-, Geschwindigkeits- oder Impulsamplitude, oder noch etwas anderes, als konstant vorgeben. Tatsächlich ist das Experiment, das in den meisten Büchern beschrieben wird, so angelegt, dass der Erreger in Abb. 1 an der Stelle Q eingebaut ist, wobei – anders als in dem entsprechenden Text behauptet – nicht seine Kraft-, sondern seine Ortsamplitude konstant gehalten wird. Die Rechnung zeigt allerdings, dass sich in beiden Fällen dieselbe Differenzialgleichung ergibt, so dass die falsche Annahme oder Behauptung keine Konsequenzen hat.

[2] In manchen Hochschultexten wird die Erscheinung der Resonanz offenbar nicht dem ganzen schwingenden System zugeordnet, sondern den einzelnen physikalischen Größen des Systems. So gibt es außer der Resonanz der Ortsamplitude noch eine Energieresonanz (M. Alonso, E. J. Finn, Physik, Inter European Editions, Amsterdam 1977, S. 171) oder eine Geschwindigkeitsresonanz (G. Joos, Lehrbuch der Theoretischen Physik, 15. Aufl., Aula-Verlag, Wiesbaden 1989, S. 105).

[3] Obwohl wir die Funktionsgleichungen für $x_0(\omega)$, $v_0(\omega)$ und $\overline{P_{\text{diss}}(\omega)}$ für unsere Argumentation nicht brauchen, seien sie hier aufgeführt:

$$x_0(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + k^2\omega^2}}$$

$$v_0(\omega) = \frac{\omega \cdot F_0}{\sqrt{m^2\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + k^2\omega^2}}$$

$$\overline{P_{\text{diss}}(\omega)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k \cdot \omega^2 \cdot {F_0}^2}{m^2\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + k^2\omega^2}$$

Als unabhängige Variable wurde hier die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ verwendet. F_0 ist die Kraftamplitude und m die Masse des schwingenden Körpers.

[4] Die entsprechende Rechnung für einen elektrischen Schwingkreis ist uns vertrauter. Es gelten die folgenden Entsprechungen: Dem Impulsstrom F entspricht der elektrische Strom I, der Geschwindigkeit v das elektrische Potenzial φ, der Geschwindigkeitsdifferenz Δv die elektrische Potenzialdifferenz $\Delta\varphi$ (= Spannung U) und dem Kehrwert der Dämpfungskonstanten k der elektrische Widerstand R. k kann also interpretiert werden als der Leitwert für Impulsströme. Bei Verwendung dieser Analogie berechnet sich die pro Zeit im elektrischen Widerstand eines Schwingkreises dissipierte Energie zu

$$P_{\text{diss}} = U \cdot I$$

Hier ist U die Spannung zwischen den Anschlüssen des Widerstandes und I der Strom durch den Widerstand.

Mit $I = U/R$ wird

$$P_{\text{diss}} = \frac{U^2}{R}$$

und der Mittelwert:

$$\overline{P_{\text{diss}}} = \frac{\overline{U^2}}{R} = \frac{{U_0}^2}{2R}$$