

# 165 Die barometrische Höhenformel

## ZUSAMMENFASSUNG

Die barometrische Höhenformel wird hergeleitet unter der Annahme, dass die Temperatur der Luft höhenunabhängig ist, d.h. dass sich das thermische Gleichgewicht in vertikaler Richtung einstellen kann. Diese Annahme ist einer realistischen Annahme gerade entgegengesetzt, nämlich dass ein Entropieaustausch zwischen verschiedenen Luftportionen in vertikaler Richtung stark behindert ist.

## Gegenstand

Im Zusammenhang mit dem Thema „Atmosphärendruck“ wird die barometrische Höhenformel behandelt. Dabei wird betont, dass die der Herleitung zu Grunde liegende Annahme einer von der Höhe unabhängigen Temperatur nicht realistisch ist.

1. „Mit Hilfe der ... Gleichung läßt sich aus dem Luftdruck in zwei verschiedenen Höhen die Höhendifferenz bestimmen (barometrische Höhenmessung). Die Voraussetzung konstanter Temperatur ist in Wirklichkeit nicht gegeben. Für nicht zu große Höhenunterschiede kann man das arithmetische Mittel aus den Temperaturen in den Höhen  $h_0$  und  $h$  verwenden.“
2. „Diese Gleichung, die man gewöhnlich barometrische Höhenformel nennt, gibt die Möglichkeit, die Höhendifferenz zwischen zwei Punkten zu berechnen, wenn man Luftdruck und Lufttemperatur an beiden Stationen kennt. Die beiden Gleichungen (...) gelten für eine isotherme Atmosphäre; in der Natur ist die Temperatur normalerweise mit der Höhe veränderlich. Man kann jedoch ohne größeren Fehler die Formeln für die isotherme Atmosphäre auch auf die natürlich Atmosphäre anwenden, wenn man für  $T$  den Mittelwert der Temperatur zwischen den beiden Niveaus einsetzt.“
3. „Unter der (unrealistischen) Voraussetzung, daß die Erdatmosphäre die einheitliche Temperatur  $T$  besitzt, läßt sich eine Formel für die Abhängigkeit des Gasdruckes  $p$  von der Höhe  $h$  angeben: ...“
4. „Hier ist allerdings, da das Boyle-Mariottesche Gesetz benutzt wurde, Temperaturkonstanz vorausgesetzt; zutreffender ist eine auf dem adiabatischen Gesetz  $p/\rho^\kappa = \text{const}$  beruhende Höhenformel, die auf analoge Weise abgeleitet wird.“
5. „In Wirklichkeit nimmt die Temperatur i. allg. in der Troposphäre (bis 10-12 km) mit der Höhe ab. Die Troposphäre wird für trockene Luft besser durch die adiabatisch-indifferente Schichtung beschrieben.“

## Mängel

Zunächst wird die barometrische Höhenformel unter der Annahme, die Atmosphäre befinde sich in vertikaler Richtung im thermischen Gleichgewicht, hergeleitet, etwa in der Form

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

und dann wird dementiert.

Manchmal (Zitate 1 und 2) wird noch vorgeschlagen, wie man trotz dieser Unzulänglichkeit mit der Formel etwas anfangen kann: indem man sie auf kleine Höhenintervalle anwendet und den Mittelwert der Temperatur verwendet.

Durch die mathematische Behandlung des Problems wird zunächst der Eindruck eines strengen Vorgehens erweckt. Dann wird aber eingestanden, dass die Voraussetzungen der Rechnung „in Wirklichkeit nicht gegeben“ sind, dass sie „unrealistisch“ sind. Es wird sogar erklärt, wie es eigentlich besser gemacht werden könnte – Zitate 4 und 5 –, aber es wird nicht besser gemacht.

Man mag geneigt sein, dieses Vorgehen damit zu begründen, dass es sich dabei um eine Idealisierung handle, etwa so, wie wenn man in der Mechanik annimmt, dass keine Reibung vorhanden ist. Bei der barometrischen Höhenformel steht es anders: Um sie herzuleiten wurde nicht irgendein störender Einfluss oder Effekt weggelassen. Es wurde vielmehr, was den vertikalen Entropieaustausch betrifft, das Gegenteil von dem angenommen, was in der Natur realisiert ist.

Man kann zwei Extremfälle thermodynamischer Prozesse betrachten: isotherme und isentrope. Im Fall der Atmosphäre ist das isentrope Verhalten, genauer: die Annahme konstanter molarer Entropie, eine gute Näherung; die Annahme, dass sich Temperaturen ausgleichen ist eine schlechte. Man hat hier also nicht einen störenden Einfluss zunächst weggelassen, wie man es im Fall der Mechanik mit der Reibung tut. „Isotherm“ ist nicht die erste Näherung „isentrop“, sondern das Gegenteil davon [1].

Dass die Annahme einer höhenunabhängigen Temperatur eine schlechte Annahme ist, ist offensichtlich. Sie setzt voraus, dass sich die Luft in großer Höhe mit der in geringer Höhe im thermischen Gleichgewicht befindet. Das thermische Gleichgewicht kann sich aber nur einstellen, wenn ein Entropietransport stattfinden kann, der nicht konvektiv ist, d.h. ein Entropieaustausch zwischen einer Luftportion und einer anderen. Eine Bewegung der Luft, auch ein kräftiges Umrühren durch Turbulenz schafft kein thermisches Gleichgewicht zwischen Luftportionen in verschiedenen Höhen. Im Gegenteil: kräftiges Durchmischen der Luft ist die Voraussetzung dafür, dass sich der natürliche Temperaturgradient einstellt.

Offenbar wird der natürliche Temperaturgradient nicht so ernst genommen wie der Druckgradient. Wer käme auf die Idee, das Temperaturgefälle zu berechnen und dabei schnell mal den Druck als konstant anzunehmen.

Zwei Mechanismen können den Temperatursausgleich zwischen verschiedenen Luftportionen fördern: Wenn Wasser in niedriger Höhe oder auf dem Erdboden verdunstet und in großer Höhe kondensiert, und dann als Regen durch die Luft hindurch wieder nach unten gelangt, hat man einen Entropietransport durch die Luft hindurch von unten nach oben, mit der Tendenz, das Temperaturgefälle zu vermindern; ebenso die (Netto-)Strahlung von unten nach oben, die in dieselbe Richtung wirkt. Dies sind zusätzliche Effekte, die man, wenn man die Atmosphäre verstehen will, zunächst unberücksichtigt lässt. Man beginnt also mit der „trocken-isentropen“ (oder wie man gewöhnlich sagt, der trocken-adiabatischen) Atmosphäre.

Dass die barometrische Höhenformel ein sehr einfaches Gesetz ist, das man einem Anfänger gut zumuten kann, kann auch keine Rechtfertigung für die Annahme konstanter Temperatur sein, denn die Druckabnahme der trocken-isentropen Atmosphäre ist nicht komplizierter. Es ist eine Potenzfunktion (mit gebrochenem Exponenten):

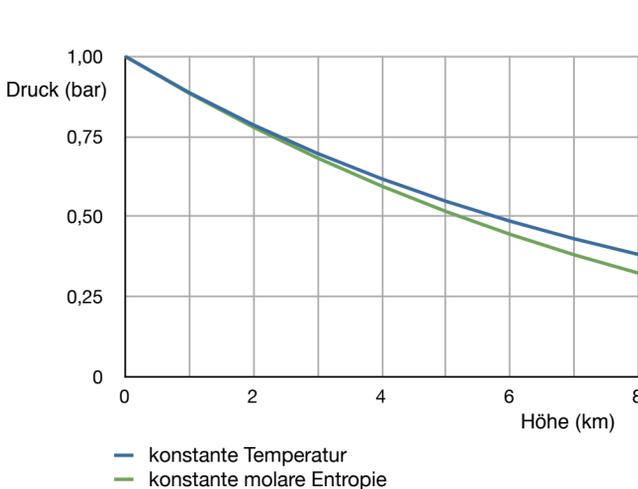
$$p(h) = p(0) \left( 1 - \frac{Mg}{c_p T(0)} h \right)^{\frac{c_p}{R}}$$

Die Temperaturabnahme mit der Höhe, von der man annimmt, dass es sie gar nicht gibt, befolgt ein noch einfacheres Gesetz. Sie ist linear<sup>1</sup>:

$$T(h) = T(0) - \frac{Mg}{c_p} h$$

Noch eine Merkwürdigkeit, die in den Zitaten 1 und 2 zum Ausdruck kommt.

Man bemüht sich zu erklären, wie man die Höhe über eine Druckmessung bestimmen kann. Da die barometrische Höhenformel nicht besonders geeignet ist, wird vorgeschlagen, sich auf kleine Höhenintervalle zu beschränken. Die Abbildung zeigt den Druckverlauf mit der Höhe, so wie er aus der barometrischen Höhenformel folgt und wie es der trocken-isentropen Atmosphäre entspricht. Man sieht: wenn man eine Höhenbestimmung in kleinen Intervallen macht, ist es tatsächlich egal welche der beiden Formeln man benutzt. Allerdings kann man sich dann auch die ganze Mühe sparen: eine lineare Näherung tut es ebenso.



## Herkunft

1. Wenn man mit der Entropie nicht zurechtkommt, wird einem die Bedingung konstanter Entropie als unanschaulicher erscheinen als die Bedingung konstanter Temperatur. Sie ist auch schwerer zu formulieren, wenn man dabei vermeiden will, die Entropie zu erwähnen [2].
2. Die barometrische Höhenformel ist willkommen, weil sie ein einfaches Beispiel für das Wirken der Boltzmann-Formel zu sein scheint.
3. Man kann das Gesetz allein mit Mitteln der Mechanik herleiten. So vermeidet man, es mit der ungeliebten Thermodynamik zu tun zu bekommen. Wenigstens entsteht dieser Eindruck. Aus der Thermodynamik übernimmt man nur das Boyle-Mariottesche Gesetz, in dem aber nur die mechanischen Größen  $p$  und  $V$  auftreten. Dass diese bei einem Gas stark an die thermischen Größen gekoppelt sind, fällt dabei nicht weiter auf. Das Konstanthalten der Temperatur scheint hier eine Maßnahme derselben Art zu sein, wie das Konstanthalten der Temperatur etwa beim Nachweis des Ohmschen Gesetzes.

## Entsorgung

1. Man mache klar, dass in der Atmosphäre im Gleichgewicht nicht nur ein natürliches Druckgefälle herrscht, sondern auch ein natürliches Temperaturgefälle, und dass dieses nicht mit der Bemerkung abgetan werden kann, das thermische Gleichgewicht habe sich noch nicht eingestellt.
2. Man behandelt als Idealisierung die trockene Atmosphäre. Hier ist der Temperaturverlauf besonders einfach, nämlich linear.

<sup>1</sup> Dieses Gesetz würde dazu führen, dass die Temperatur in einer Höhe von etwa 30 km, also weit oberhalb der Troposphäre, den absoluten Nullpunkt erreicht. Die Luft wäre vorher natürlich schon flüssig geworden, sodass die Voraussetzungen der Herleitung nicht mehr erfüllt sind.

[1] G. Job, *Die Temperaturschichtung der Atmosphäre*, Altlasten der Physik, Aulis Verlag Deubner (2002), Köln, S. 117

[2] Altlasten der Physik 164